

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ БЕССЕТОЧНЫМ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ*

Вас. С. Иванов¹, В. С. Иванов², Р. Р. Тухватуллина³, С. М. Фролов⁴, Б. Басара⁵

Аннотация: Реализован бессеточный численный метод гидродинамики сглаженных частиц для решения уравнения теплопроводности в телах сложной трехмерной геометрии. Проведено сравнение полученных численных решений тестовых задач с аналитическими и численными решениями с использованием метода контрольных объемов. Проведен расчет установления температурного поля в трехмерной модели охлаждаемой крышки блока цилиндра двигателя внутреннего сгорания (ДВС). Результаты расчетов с использованием бессеточного численного метода и метода контрольных объемов хорошо согласуются между собой. Предложенный метод планируется использовать для решения сопряженных газодинамических и тепловых задач: для решения газодинамической задачи будет использоваться сеточный метод, а для решения тепловой задачи в ограничивающих стенках и в обтекаемых телах — бессеточный численный метод.

Ключевые слова: трехмерное уравнение теплопроводности; бессеточный численный метод; гидродинамика сглаженных частиц; распределение температуры

DOI: 10.30826/CE20130308

1 Введение

Математическое моделирование распространения тепла в твердом теле связано с решением начально-краевой задачи, которая в большинстве случаев не имеет аналитического решения. Для получения решения используются численные методы, которые можно разделить на две группы: методы, требующие использования расчетной сетки, и бессеточные методы. Методы обеих групп имеют свои преимущества и недостатки при решении тех или иных конкретных задач. При решении задач с расчетными областями сложной геометрии, а также задач с подвижными границами предпочтение часто отдают бессеточным методам. Один из ярких представителей бессеточных методов — метод сглаженных частиц (МСЧ); английский вариант — Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Главные преимущества МСЧ — отсутствие необходимости построения качественной расчетной сетки (трудоемкого процесса) и возможность повышения

точности решения за счет увеличения числа частиц.

Первоначально МСЧ разрабатывался для решения астрофизических задач [1, 2]. Относительно недавно он был успешно применен к задачам механики сплошных сред [3–5]. В работе [6] впервые предложен способ аппроксимации уравнения теплопроводности с использованием МСЧ. Этот способ показал хорошие результаты при решении задач с постоянным или медленно изменяющимся коэффициентом теплопроводности. В [7] предложен усовершенствованный способ аппроксимации уравнения теплопроводности с помощью МСЧ, позволяющий с хорошей точностью решать задачи с быстро и значительно изменяющимся коэффициентом теплопроводности, например в зависимости от температуры. Позднее в [8] предложен подход, при котором эволюция температуры в телах из различных материалов описывается еще точнее.

*Работа выполнена за счет субсидии, выделенной ФИЦ ХФ РАН на выполнение Государственного задания по теме 0082-2016-0011 (номер государственной регистрации АААА-А17-117040610346-5) и субсидии, выделенной на выполнение Государственного задания ИСМАН (тема 45.2).

¹Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук; Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Ivanov94VS@yandex.ru

²Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук; Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, ivanov.vls@gmail.com

³Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, tukhvatullinarr@gmail.com

⁴Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук; Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук; Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ; Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения им. А. Г. Мерджанова Российской академии наук, smfrol@chph.ras.ru

⁵AVL LIST GmbH, Graz, Austria, branislav.basara@avl.com

Практика применения МСЧ показала, что в зонах вблизи границ или на самих границах расчетной области этот бессеточный метод может давать повышенные погрешности значений параметров среды. В работе [9] предложены способы повышения точности аппроксимации решений в таких зонах расчетной области.

Цели данной работы:

1. Разработать последовательный алгоритм МСЧ и реализовать его в вычислительной программе для решения нестационарного трехмерного уравнения теплопроводности с учетом уточнений [7, 8].
2. Проверить реализованный численный метод на задачах, имеющих аналитическое решение, или на численных решениях задач с использованием сеточных методов.
3. Провести расчет распространения тепла в трехмерной модели охлаждаемой крышки блока цилиндра ДВС, выполненной из однородного материала.
4. Разработать параллельный алгоритм МСЧ и реализовать его в вычислительной программе для решения нестационарного трехмерного уравнения теплопроводности.

2 Численное моделирование

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное тело, температура которого в точке пространства (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $T(x, y, z, t)$. Распределение температуры в теле подчиняется уравнению теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F,$$

где ρ — плотность тела; c — теплоемкость; k — коэффициент теплопроводности; F — плотность объемных тепловых источников. В общем случае величины ρ , c и k зависят от координат. В частном случае изотропного материала тела и отсутствия объемных источников тепла уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad (1)$$

где $a = k/(\rho c)$ — коэффициент температуропроводности.

Для обеспечения корректности начально-краевой задачи необходимо задать начальные и граничные условия. Начальные условия могут быть заданы в виде:

$$T|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (2)$$

где $\varphi(x, y, z)$ — некоторая функция пространственных координат. Что касается граничных условий, в данной работе используются неоднородные граничные условия Дирихле и однородные граничные условия Неймана. Для граничных условий Дирихле в каждой точке поверхности S задается температура стенки T_w :

$$T|_S = T_w(t). \quad (3)$$

Для граничных условий Неймана на поверхности тела задается тепловой поток:

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (4)$$

2.2 Численный алгоритм

В основе МСЧ лежит аппроксимация поля неподвижными дискретными частицами. Исходя из определения дельта-функции Дирака, любую функцию $f(\mathbf{r}) : R^3 \rightarrow R$ можно представить в виде:

$$f(\mathbf{r}) = \int_{R^3} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv, \quad (5)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — дельта-функция Дирака; \mathbf{r} и \mathbf{r}' — радиус-векторы в трехмерном пространстве.

Чтобы получить численную аппроксимацию функции f в точке, задаваемой вектором \mathbf{r} , можно заменить дельта-функцию некоторой сглаживающей функцией (kernel function) $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ с конечным носителем h (радиусом сглаживания), имеющей следующие свойства:

$$\begin{aligned} W &= 0 \text{ при } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \geq k_h h; \\ \int_{\Omega} \int_{\Omega} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' &= 1; \\ \lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

где k_h — целочисленный параметр, определяющий ненулевую область сглаживающей функции — $k_h h$. С учетом этого можно перейти от интегрирования по всему пространству к интегрированию по локальной области Ω с ненулевым значением сглаживающей функции. Тогда вместо (5) получим:

$$f(\mathbf{r}) \cong \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) dv, \quad (6)$$

где интеграл берется по сферической области Ω с ненулевым значением сглаживающей функции.

В МСЧ интеграл (6) аппроксимируется следующей суммой по набору дискретных частиц:

$$f_i = f(\mathbf{r}_i) \cong \sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (7)$$

причем суммирование производится по номерам частиц j , N — число частиц в области Ω , $W_{ij} = W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$, m_j — масса j -й частицы; ρ_j — плотность j -й частицы; f_i или f_j — это свойство (в нашем случае температура), определенное на i -й или j -й частице. Представление переменной f_i в виде (7) является основой МСЧ, а правильный выбор сглаживающей функции W — одна из ключевых проблем МСЧ.

По аналогии с (6) и (7) можно аппроксимировать производные. Так, согласно [10], для первой производной получим:

$$(\nabla \cdot f(\mathbf{r})) \cong - \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \cdot \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) dv;$$

$$(\nabla \cdot f(\mathbf{r}_i)) \cong - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j \nabla W_{ij}.$$

Для второй производной в соответствии с [7, 11]:

$$(\Delta \cdot f(\mathbf{r})) \cong \int_{\Omega} (f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}')) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - \eta^2} dv; \quad (8)$$

$$(\Delta \cdot f(\mathbf{r}_i)) \cong \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (f_i - f_j) \frac{\nabla W_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \eta^2}, \quad (9)$$

где $\eta = 0,001h$ — постоянная, обеспечивающая отличие от нуля знаменателя в выражениях (8) и (9) в случае, когда две частицы с разной температурой имеют одинаковые координаты.

На рис. 1 схематически показана область влияния сглаживающей функции W (в этой области функция W отлична от нуля) для i -й частицы. Все

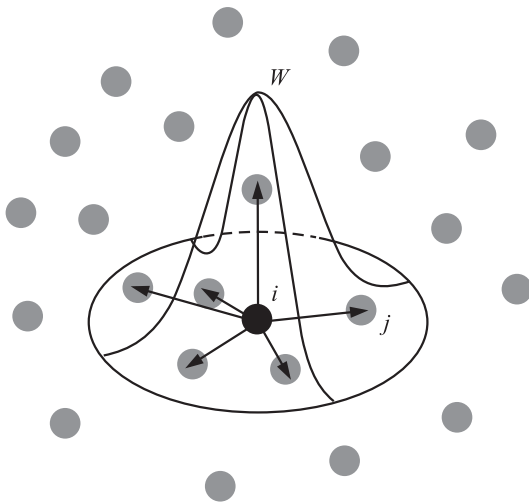


Рис. 1 Сглаживающая функция и область влияния для i -й частицы

частицы, которые оказываются внутри области влияния (соединены стрелками), вносят свой вклад в значение аппроксимируемой функции. Если область влияния выходит за границы расчетной области, где частиц нет, в вычислении суммы (7) возникает погрешность, о которой упоминалось выше.

В данной работе в соответствии с рекомендацией [12] сглаживающая функция выбрана в виде кубического В-сплайна:

$$W(q, h) = \alpha \begin{cases} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3, & 0 \leq q < 1; \\ \frac{1}{6}(2-q)^3, & 1 \leq q < 2; \\ 0, & q \geq 2. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $q = \mathbf{r}_{ij}/h = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/h$, а коэффициент α в одномерном, двумерном и трехмерном случаях равен $1/h$, $15/(7\pi h^2)$ и $3/(2\pi h^3)$ соответственно.

Таким образом, аппроксимация уравнения теплопроводности (1) в МСЧ принимает вид [9, 12]:

$$c_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \frac{4k_i k_j}{k_i + k_j} (T_i - T_j) F_{ij}, \quad (11)$$

где

$$F_{ij} = \frac{\nabla W_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^2 + \eta^2},$$

причем производная в числителе берется в явном виде для функции W в (10); c_i — удельная теплоемкость i -й частицы; T_i — температура i -й частицы. Следуя заявленной цели работы (см. п. 3 в разд. 1), для аппроксимации уравнения теплопроводности нами выбрано соотношение (11). Для интегрирования по времени в (11) используется явный метод Эйлера:

$$c_i \frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\tau} = S_T, \quad (12)$$

где T_i^m — температура i -й частицы на временном шаге m ; τ — шаг по времени; S_T — правая часть в (11), которая рассчитывается на временном шаге m .

Начальные условия (2) аппроксимируются следующим образом. Сначала алгоритмом предусмотрено считывание информации о форме рассматриваемого тела, которая содержится в STL-файле (формат файла, в котором форма тела представлена поверхностью из треугольников). Далее тело целиком вписывается в прямоугольный параллелепипед, размеры которого соответствуют габаритным размерам тела. В начальный момент времени в параллелепипеде задается набор частиц с объемной плотностью n_p , распределенных равномерно по пространству. Затем из всего набора частиц выбираются только те частицы, которые лежат внутри

тела (внутренние частицы), а частицы, которые оказались снаружи, удаляются. Всем внутренним частицам присваивается начальная температура $\varphi(x, y, z)$ (см. (2)).

Граничные условия (3) аппроксимируются следующим образом. На основе STL-файла, описывающего граничную поверхность тела в виде набора треугольников, на границе задаются граничные частицы с поверхностной плотностью $n_{\text{рб}}$ и температурой $T_w(t)$. Значение поверхностной плотности $n_{\text{рб}}$ выбирается так, чтобы для любой приграничной внутренней частицы количество соседних частиц как среди внутренних, так и среди граничных частиц было одинаковым.

Граничные условия (4) в МСЧ выполняются естественным образом без необходимости инициализации граничных частиц [7], так как если на теплоизолированной границе нет граничных частиц, то внутренние частицы не смогут отдавать тепло через эту границу. В этом случае тепловой поток от приграничных внутренних частиц к теплоизолированной границе отсутствует.

Для параллельной реализации использовалась программно-аппаратная архитектура CUDA, позволяющая производить вычисления с использованием графических процессоров. Архитектура CUDA используется для наиболее ресурсоемких процедур вычислительной программы (начальная инициализация частиц, поиск соседей и составление списка соседних частиц для каждой частицы, вычисление источников в уравнении распространения тепла). Для этого перед началом расчета выделяется память для массивов данных, использующихся в расчете на устройстве (видеокарта), затем данные, хранящиеся на хосте (центральный процессор), копируются в массивы для расчета на устройстве. Далее с использованием графических процессоров вычислялись S_T для каждой частицы (см. выражение (12) как для внутренних, так и для граничных частиц в соответствии с граничными условиями. После этого данные пересылались обратно на хост, где выполнялся шаг интегрирования по времени и вычислялось значение на $(m + 1)$ -м временном слое.

На основе (11)–(12) разработаны последовательный и параллельный явные численные алгоритмы со вторым порядком точности по пространству [7] и с первым по времени.

3 Проверка численных алгоритмов

Для проверки численных алгоритмов выбраны три тестовые задачи, которые решаются в трехмер-

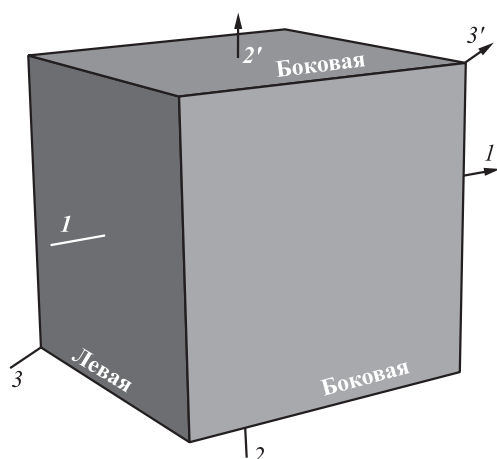


Рис. 2 Расчетная область для тестовых задач

ной постановке. На рис. 2 представлена расчетная область с указанием направлений, вдоль которых строятся распределения температуры. Размеры расчетной области: $2 \times 2 \times 2$ м. Значения параметров среды во всех тестовых задачах выбраны одинаковыми: $\rho = 2700$ кг/м³; $k = 220$ Вт/(м·К); $c = 900$ Дж/(кг·К). Чтобы выяснить влияние числа частиц N_V (N_V — число частиц во всем объеме расчетной области) на получаемое решение, расчеты проводятся при $N_V = 20\,000$, $10\,000$ и $5\,000$. Радиус влияния h зависит от общего числа частиц N_V : $h = 0,11$ при $N_V = 20\,000$; $h = 0,14$ при $N_V = 10\,000$; $h = 0,17$ при $N_V = 5\,000$. Ниже влияние N_V на результаты расчетов показано лишь для какого-либо одного промежуточного момента времени. Шаг интегрирования по времени выбирался по критерию $\tau \leq \beta \rho c h^2 / k$ [7], где $\beta = 0,1$, и был одинаковым для всех тестовых задач ($\tau = 10$ с).

Задача 1: Одномерное поле

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} T|_{t=0} &= 0 \text{ К;} \\ T|_{\text{Левая}} &= 100 \text{ К;} \\ T|_{\text{Правая}} &= 0 \text{ К;} \\ \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\text{Боковая}} &= 0 \text{ К/м.} \end{aligned}$$

На рис. 3, а показано сравнение расчетного распределения температуры вдоль линии $I-I'$ (см. рис. 2) с аналитическим решением, полученным разделением переменных методом Фурье:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \left(\frac{l-x}{l} T_{\text{Левая}} + \frac{x}{l} T_{\text{Правая}} \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) A(n) e^{-a(\pi n/l)^2 t}, \end{aligned}$$

где $l = 2$; $A(n) = -200/(\pi n)$. Аналитическое решение получено для $t \geq 0$ и $x \in [0; l]$.

Задача 2: Двумерное поле

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} T|_{t=0} &= 100 \text{ К}; \\ \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\text{Левая}} &= 0 \text{ К}; \\ \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\text{Правая}} &= 0 \text{ К/м}; \\ T|_{\text{Боковая}} &= 0 \text{ К}. \end{aligned}$$

На рис. 3, б показано сравнение расчетного распределения температуры вдоль линии 2–2' (см. рис. 2) с аналитическим решением, полученным разделением переменных методом Фурье:

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= \\ &= \frac{16T|_{t=0}}{\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \frac{e^{-a\pi^2((2k-1)/L)^2 + ((2l-1)/H)^2 t}}{(2k-1)(2l-1)} \times \\ &\quad \times \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{(2l-1)\pi y}{H}\right), \end{aligned}$$

где $L = H = 2$. Аналитическое решение получено для $t \geq 0$ и $x \in [0; L]$, $y \in [0; H]$.

Задача 3: Трехмерное поле

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} T|_{t=0} &= 293,15 \text{ К}; \\ T|_{\text{Левая}} &= 393,15 \text{ К}; \\ T|_{\text{Правая}} &= 393,15 \text{ К}; \\ T|_{\text{Боковая}} &= 393,15 \text{ К}. \end{aligned}$$

Расчет с помощью МСЧ проводился на компьютере с процессором Intel® Core™ i7-9700F с частотой 3,0 ГГц, объемом оперативной памяти 64 ГБ и видеокартой NVIDIA GeForce GTX 1070. Время расчета до установления теплового поля для всех задач в последовательной версии не превышало 15 мин, а с использованием технологии CUDA — 3 мин.

На рис. 3, в показано сравнение расчетного распределения температуры вдоль линии 3–3' (см. рис. 2) с численным решением методом контрольных объемов, полученным с использованием пакета AVL FIRE. Решение задачи методом контрольных объемов получено на равномерной расчетной сетке с размером ячейки 0,02 м (всего 1 млн ячеек) с постоянным шагом интегрирования по времени, равным 10 с. Расчет проведен с использованием полунявной схемы с первым порядком точности

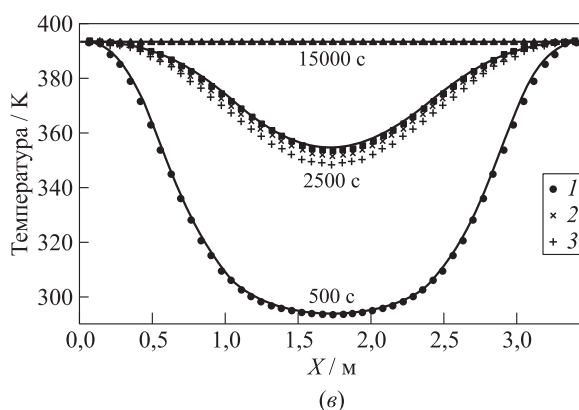
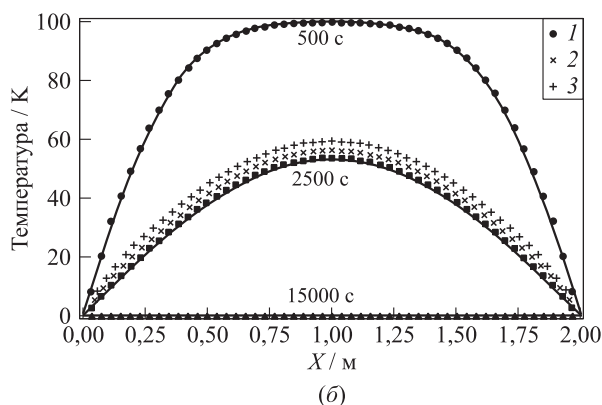
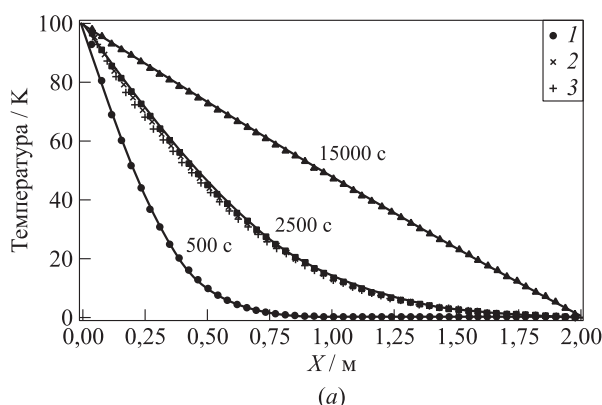


Рис. 3 Сравнение расчетных распределений температуры, полученных МСЧ (значки), с аналитическими и численными решениями (кривые) для трех тестовых задач: (а) задача 1; (б) задача 2; (в) задача 3; 1 — $N_V = 20\,000$; 2 — $10\,000$; 3 — $N_V = 5\,000$

по времени и вторым по пространству. Расчет выполнен на кластере из 8 процессоров (8 потоков на каждый процессор) Intel® Xeon® CPU E5-2667 v4 с частотой 3,2 ГГц и объемом оперативной памяти 64 ГБ. Время расчета до установления теплового поля для задачи, запущенной на 14 потоков, составило 7 мин.

Из рис. 3 следует, что эволюция температурных полей, получаемых с помощью МСЧ, очень хорошо

согласуется с аналитическими решениями и с численным решением сеточным методом.

4 Распространение тепла в крышке блока цилиндра двигателя внутреннего сгорания

Разработанный численный алгоритм использован для расчета распространения тепла в модели крышки блока цилиндра ДВС, геометрия которой представлена на рис. 4.

Одна часть стенок блока поддерживается при температуре $T|_{\Gamma_{\text{гор}}} = 393 \text{ К}$, а другая — при температуре $T|_{\Gamma_{\text{хол}}} = 313 \text{ К}$. Начальная температура внутри всей расчетной области: $T|_{t=0} = 313 \text{ К}$. Для расчета выбраны следующие значения свойств материала крышки: $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$; $k = 220 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $c = 900 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Расчет проводится при $N_V = 200\,000$, $\tau = 0,001 \text{ с}$, $h = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Расчет с помощью МСЧ проводился на компьютере с процессором Intel® Core™ i7-9700F с частотой 3,0 ГГц, объемом оперативной памяти 64 ГБ и видеокартой NVIDIA GeForce GTX 1070. Время расчета до установления теплового поля в последовательной версии составило 5 ч, а с использованием технологии CUDA — 10 мин.

Результаты численного решения задачи с помощью МСЧ сравниваются с решением, полученным сеточным методом контрольных объемов с использованием пакета AVL FIRE. Решение задачи методом контрольных объемов получено на неравномерной расчетной сетке (всего 2,5 млн ячеек) с постоянным шагом по времени $\tau = 0,001$. Расчет проведен с использованием полунявной схемы

с первым порядком точности по времени и вторым по пространству. Расчет выполнен на кластере из 8 процессоров (8 потоков на каждый процессор) Intel® Xeon® CPU E5-2667 v4 с частотой 3,2 ГГц и объемом оперативной памяти 64 ГБ. Время расчета до установления теплового поля для задачи, запущенной на 56 потоков, составило 20 мин.

На рис. 5 показано сравнение полей температуры для двух моментов времени в одном из поперечных сечений тела ($t = 0,1$ и $5,0 \text{ с}$). Результаты, полученные с использованием МСЧ, представлены для двух вариантов начального распределения частиц. В первом используется равномерное распределение, описанное в подразд. 2.2 (см. рис. 5, левый столбец), а во втором в качестве начального распределения частиц используются узлы неравномерной расчетной сетки, построенной для МКО (см. рис. 5, средний столбец). Видно, что результаты, полученные бессеточным МСЧ, хорошо согласуются с результатами, полученными методом контрольных объемов, причем решение бессеточным методом практически не зависит от способа инициализации частиц в МСЧ. Коммуникационные издержки при пересылке данных между устройствами занимают около 10% времени расчета одного шага по времени. Максимальное абсолютное отклонение в локальных расчетных значениях температуры в установившемся тепловом поле ($t = 5,0 \text{ с}$) не превышает 5 К, а относительное — менее 1,5%.

5 Заключение

Таким образом, нами разработаны и реализованы в вычислительной программе последовательный

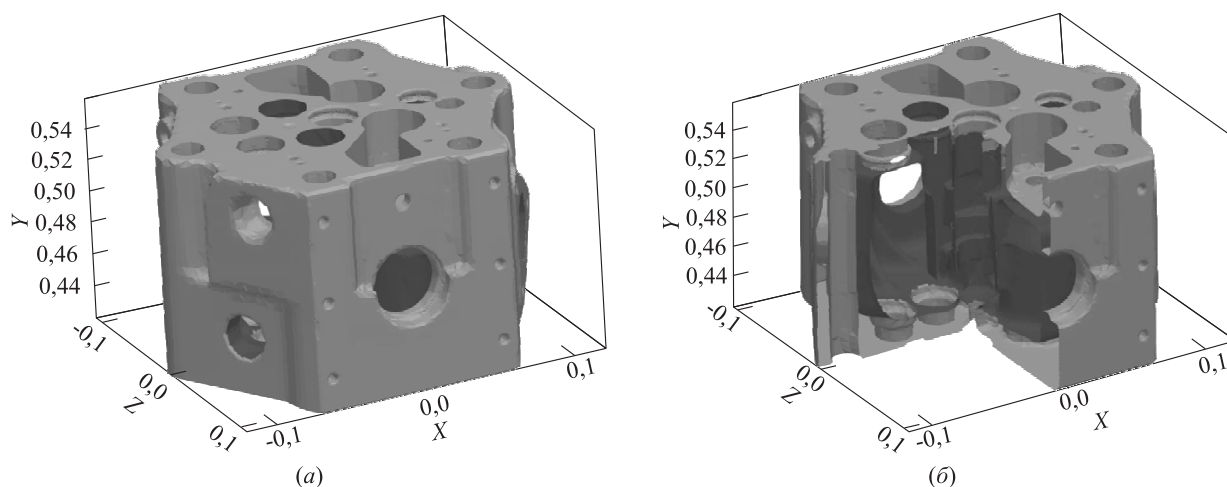


Рис. 4 Схема полной расчетной области (а) и расчетной области с разрезом (б). Серым цветом показана «холодная» поверхность, черным — «горячая»

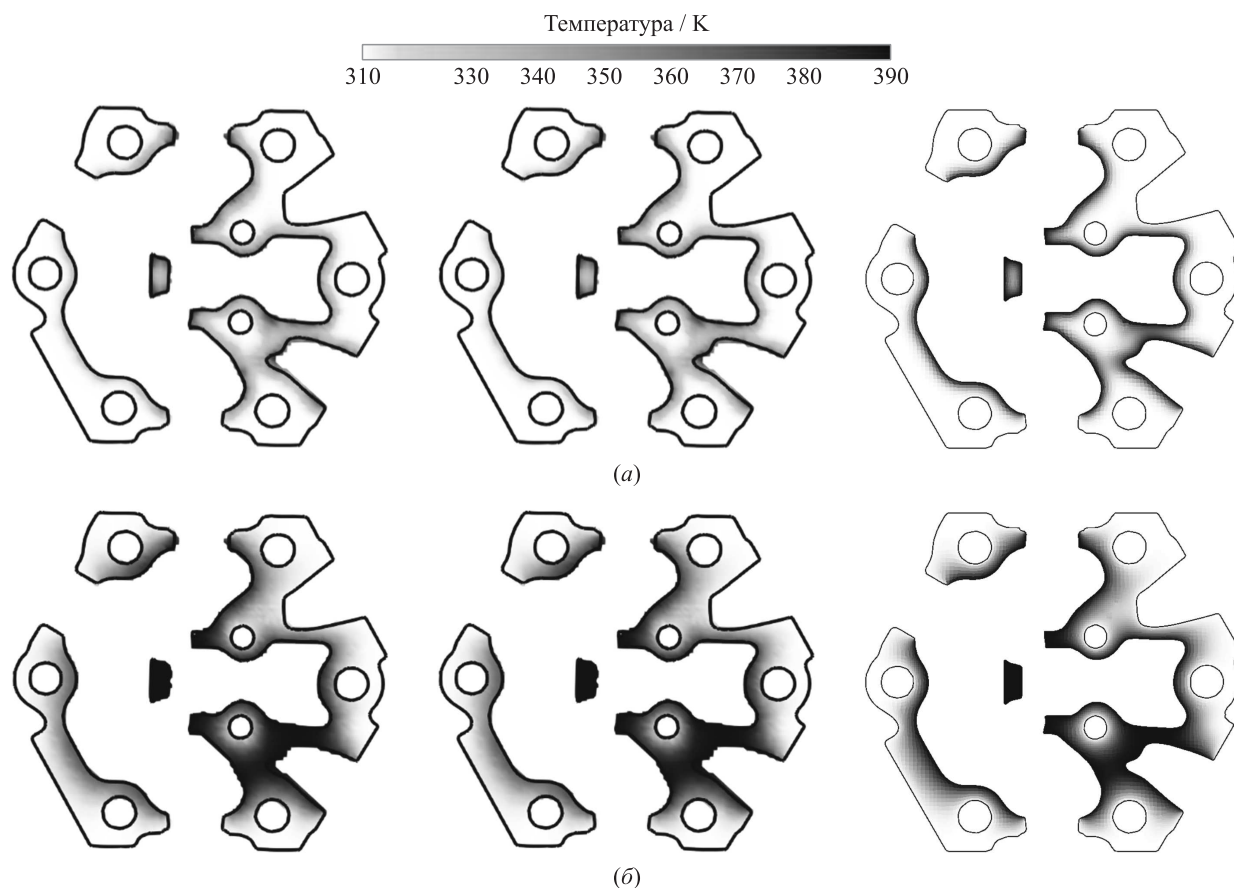


Рис. 5 Сравнение полей температуры для двух моментов времени для результатов, полученных с использованием МСЧ с равномерным распределением частиц (левый столбец), с распределением частиц по узлам расчетной сетки (средний столбец) и с численным решением МКО (правый столбец) для двух моментов времени: (а) $t = 0,1$ с; (б) $t = 5,0$ с

и параллельный алгоритмы МСЧ для решения нестационарного трехмерного уравнения теплопроводности в телах сложной формы. Реализованные алгоритмы проверены на задачах, имеющих аналитическое решение, а также на задаче с численным решением, полученным с использованием сеточного метода. Для демонстрации возможностей и точности разработанных алгоритмов проведен расчет распространения тепла в сложной трехмерной модели охлаждаемой крышки блока цилиндра ДВС. Сравнение решений, полученных бессеточным и сеточным методами, показывает, что МСЧ дает приемлемую точность.

Предложенные алгоритмы планируется использовать для решения сопряженных газодинамических и тепловых задач. В этом случае для решения газодинамической задачи будет использоваться сеточный метод, а для решения тепловой задачи в ограничивающих стенках и в обтекаемых телах — МСЧ.

Литература

1. *Lucy L. B.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // *Astron. J.*, 1977. Vol. 82. P. 1013–1024.
2. *Gingold R. A., Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1977. Vol. 181. No. 3. P. 375–389.
3. *Libersky L., Petschek A. G.* Smooth particle hydrodynamics with strength of materials // *Advances in the free-Lagrange method including contributions on adaptive gridding and the smooth particle hydrodynamics method* / Eds. H. E. Trease, M. F. Fritts, W. P. Crowley. — Lecture notes in physics book ser. — Springer, 1991. Vol. 395. P. 248–257.
4. *Takeda H., Miyama S. M., Sekiya M.* Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics // *Prog. Theor. Phys.*, 1994. Vol. 92. No. 5. P. 939–960.
5. *Morris J. P., Fox P. J., Zhu Y.* Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH // *J. Comput. Phys.*, 1997. Vol. 136. No. 1. P. 214–226.

6. Brookshaw L. A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations // P. Astron. Soc. Aust., 1985. Vol. 6. P. 207–210.
7. Cleary P. W., Monaghan J. J. Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics // J. Comput. Phys., 1999. Vol. 148. No. 1. P. 227–264.
8. Parshikov A. N., Medin S. A. Smoothed particle hydrodynamics using interparticle contact algorithms // J. Comput. Phys., 2002. Vol. 180. No. 1. P. 358–382.
9. Sikarudi M. A. E., Nikseresht A. H. Neumann and Robin boundary conditions for heat conduction modeling using smoothed particle hydrodynamics // Comput. Phys. Commun., 2016. Vol. 198. P. 1–11.
10. Liu M. B., Liu G. R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): An overview and recent developments // Arch. Comput. Method. E., 2010. Vol. 17. No. 1. P. 25–76.
11. Monaghan J. J. Smoothed particle hydrodynamics // Annu. Rev. Astron. Astr., 1992. Vol. 30. No. 1. P. 543–674.
12. Monaghan J. J., Lattanzio J. C. A refined particle method for astrophysical problems // Astron. Astrophys., 1985. Vol. 149. P. 135–143.

Поступила в редакцию 12.08.2020

SOLUTION OF THERMAL CONDUCTIVITY EQUATION BY A MESHLESS METHOD OF SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS

Vas. S. Ivanov^{1,2}, V. S. Ivanov^{1,3}, R. R. Tikhvatullina⁴, S. M. Frolov^{1,2,3,5}, and B. Basara⁶

¹N. N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation

²National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 31 Kashirskoe Sh., Moscow 115409, Russian Federation

³Federal Research Center Scientific Research Institute of System Development, Russian Academy of Sciences, 36-1 Nakhimovskii Prosp., Moscow 117218, Russian Federation

⁴M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, 4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russian Federation

⁵A. G. Merzhanov Institute for Structural Macrokinetics and Materials Science, Russian Academy of Sciences, 8 Acad. Osipyan Str., Chernogolovka 142432, Moscow Region, Russian Federation

⁶AVL LIST GmbH, 1 Hanz List Pl., Graz 8020, Austria

Abstract: A meshless numerical method of smoothed particle hydrodynamics (SPH) is implemented for solving the thermal conductivity equation in bodies of complex three-dimensional (3D) geometry. The obtained numerical solutions of test problems are compared with analytical and numerical solutions based on the control volume method. The meshless SPH method is used for calculating the evolution of temperature in a 3D model of the cooled cap of a cylinder block of internal combustion engine. The results of calculations based on the meshless SPH method and the control volume method are shown to be in good agreement with each other. The meshless SPH method is intended for the solution of conjugate heat transfer problems for confined reactive flows.

Keywords: 3D thermal conductivity equation; meshless numerical method; smoothed particle hydrodynamics; temperature distribution

DOI: 10.30826/CE20130308

Figure Captions

Figure 1 Smoothing function and domain of influence for the i th particle

Figure 2 Computational domain for test problems

Figure 3 Comparison of the calculated temperature distributions obtained by the SPH method (points) with analytical and numerical solutions (curves) for three test problems: (a) problem 1; (b) problem 2; (c) problem 3: 1 — $N_V = 20\,000$; 2 — $10\,000$; and 3 — $N_V = 5000$

Figure 4 Schematic of (a) full computational domain and (b) computational domain with a cut. The “cold” surface is shown in gray, and the “hot” surface is shown in black

Figure 5 Comparison of temperature fields for two time moments predicted by the SPH method with equidistantly spaced particles (left column), distribution of particles like the nodes of the computational mesh (middle column), and control-volume-based method (right column) at $t = 0.1$ (a) and 5.0 s (b)

Acknowledgments

The work was supported by the subsidy given to the N. N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences to implement the state assignment on the topic No. 0082-2016-0011 (Registration No. AAAA-A17-117040610346-5) and to implement the state assignment of the ISMAN (topic 45.2).

References

1. Lucy, L. B. 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. J.* 82:1013–1024.
2. Gingold, R. A., and J. J. Monaghan. 1977. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 181(3):375–389.
3. Libersky, L., and A. G. Petschek. 1991. Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. *Advances in the free-Lagrange method including contributions on adaptive gridding and the smooth particle hydrodynamics method.* Eds. H. E. Trease, M. F. Fritts, and W. P. Crowley. Lecture notes in physics book ser. Springer. 395:248–257.
4. Takeda, H., S. M. Miyama, and M. Sekiya. 1994. Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics. *Prog. Theor. Phys.* 92(5):939–960.
5. Morris, J. P., P. J. Fox, and Y. Zhu. 1997. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH. *J. Comput. Phys.* 136(1):214–226.
6. Brookshaw, L. 1985. A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations. *P. Astron. Soc. Aust.* 6:207–210.
7. Cleary, P. W., and J. J. Monaghan. 1999. Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics. *J. Comput. Phys.* 148(1):227–264.
8. Parshikov, A. N., and S. A. Medin. 2002. Smoothed particle hydrodynamics using interparticle contact algorithms. *J. Comput. Phys.* 180(1):358–382.
9. Sikarudi, M. A. E., and A. H. Nikseresht. 2016. Neumann and Robin boundary conditions for heat conduction modeling using smoothed particle hydrodynamics. *Comput. Phys. Commun.* 198:1–11.
10. Liu, M. B., and G. R. Liu. 2010. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): An overview and recent developments. *Arch. Comput. Method. E.* 17(1):25–76.
11. Monaghan, J. J. 1992. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astr.* 30(1):543–674.
12. Monaghan, J. J., and J. C. Lattanzio. 1985. A refined particle method for astrophysical problems. *Astron. Astrophys.* 149:135–143.

Received August 12, 2020

Contributors

Ivanov Vasily S. (b. 1994) — research engineer, N. N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation; postgraduate student, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 31 Kashirskoe Sh., Moscow 115409, Russian Federation; Ivanov94VS@yandex.ru

Ivanov Vladislav S. (b. 1986) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading research scientist, N. N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation; research scientist, Federal Research Center Scientific Research Institute of System Development, Russian Academy of Sciences, 36-1 Nakhimovskii Prosp., Moscow 117218, Russian Federation; ivanov.vls@gmail.com

Tikhvatullina Ruzana R. (b. 1988) — Candidate of Science in physics and mathematics, senior research scientist, M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, 4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russian Federation; tikhvatullinarr@gmail.com

Frolov Sergey M. (b. 1959) — Doctor of Science in physics and mathematics, head of department, head of laboratory, N. N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences, 4 Kosygin Str., Moscow 119991, Russian Federation; professor, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 31 Kashirskoe Sh., Moscow 115409, Russian Federation; senior research scientist, Federal Research Center Scientific Research Institute of System Development, Russian Academy of Sciences, 36-1 Nakhimovskii Prosp., Moscow 117218, Russian Federation; head of laboratory, A. G. Merzhanov Institute for Structural Macrokinetics and Materials Science, Russian Academy of Sciences, 8 Acad. Osipyan Str., Chernogolovka 142432, Moscow Region, Russian Federation; smfrol@chph.ras.ru

Basara Branislav (b. 1964) — PhD, Doctor hab., chief developer, AVL LIST GmbH, 1 Hanz List Pl., Graz 8020, Austria; branislav.basara@avl.com