

КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЭВОЛЮЦИОННО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ДЛЯ МНОГОФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ

**Б. В. Лидский¹, В. С. Посвянский¹, И. В. Семенов²,
Р. Тухватуллина³, С. М. Фролов¹**

¹ИХФ РАН
г. Москва, Россия
²ИАП РАН
г. Москва, Россия
³МГУ
г. Москва, Россия

Ужесточение требований к экологическим характеристикам транспортных двигателей привело к использованию систем впрыска жидкого топлива с очень высокими давлениями. Такие системы обеспечивают более тонкое распыление жидкости и, как следствие, более эффективное использование воздуха в процессе горения и снижение выхода вредных веществ. Вместе с тем, повышение уровня давления в системе впрыска сопровождается такими нежелательными явлениями, как кавитация, оказывающими негативное влияние на характеристики топливных струй. Чтобы избежать кавитации или уменьшить ее влияние, в настоящее время во всем мире при проектировании систем впрыска активно применяются расчетные программы, позволяющие численно решать уравнения сжимаемых многомерных многофазных течений. При этом часто упускаются из виду две важные особенности проблемы. Во-первых, сами уравнения многофазных течений — предмет продолжающихся исследований и научных дискуссий: во многих публикациях эти уравнения сформулированы некорректно. Во-вторых, численные методы, используемые для решения уравнений многофазных течений, даже корректно сформулированных, не всегда правильны: для решения уравнений часто используются сегрегированные схемы с последовательным решением уравнений гидродинамики, которые сводят корректно поставленную смешанную эволюционно-краевую (ЭК) задачу к некорректному дискретному аналогу. Цель данной работы — иллюстрация указанных особенностей проблемы на простых примерах двумерных и одномерных двухфазных течений.

В рамках модели взаимопроникающих континуумов [1] систему уравнений двухфазного сжимаемого изотермического течения обычно записывают в виде:

– газовая фаза

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \rho_g u_g) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \rho_g v_g) &= S_g^m; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \rho_g u_g^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \rho_g u_g v_g) + \varphi \frac{\partial p}{\partial x} &= S_g^x; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_g v_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \rho_g u_g v_g) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi \rho_g v_g^2) + \varphi \frac{\partial p}{\partial y} &= S_g^y; \\ p = \rho_g R_g T_g; \quad \rho_g &= \frac{\gamma p}{c_g^2}; \quad c_g^2 = \gamma R_g T_g; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

– жидкая фаза

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varphi) \rho_l] + \frac{\partial}{\partial x} [(1 - \varphi) \rho_l u_l] + \frac{\partial}{\partial y} [(1 - \varphi) \rho_l v_l] &= S_l^m; \\ \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varphi) \rho_l u_l] + \frac{\partial}{\partial x} [(1 - \varphi) (\rho_l u_l^2 + \hat{\sigma}(\varphi))] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [(1 - \varphi) (\rho_l u_l v_l)] + (1 - \varphi) \frac{\partial p}{\partial x} = S_l^x; \\ \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varphi) \rho_l v_l] + \frac{\partial}{\partial x} [(1 - \varphi) (\rho_l u_l v_l)] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [(1 - \varphi) (\rho_l v_l^2 + \hat{\sigma}(\varphi))] + (1 - \varphi) \frac{\partial p}{\partial y} = S_l^y; \\ \rho_l = F(p) = \rho_{l0} + \frac{p - p_0}{c_l^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) φ — объемная доля газовой фазы; ρ — плотность; p — давление; T — температура; u и v — компоненты вектора скорости; c — скорость звука; R — газовая постоянная; γ — отношение теплоемкостей; S — источники, описывающие межфазный обмен массой (верхний индекс m) и количеством движения (верхние индексы x и y), индексы g и l относятся к газовой и жидкой фазам соответственно, индекс 0 относится к начальному состоянию среды. В (1) и (2) введен дополнительный член $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\varphi)$, вообще говоря, характеризующий давление жидкой фазы. При $\varphi = 1$ уравнения (1) и (2) сводятся к уравнениям течения невязкого сжимаемого газа. При $\hat{\sigma}(\varphi) = 0$ и $c_l \rightarrow \infty$ уравнения (1) и (2) сводятся к уравнениям невязкого двухфазного течения с несжимаемой жидкостью.

Уравнения (1) и (2) можно представить в общем виде:

$$G \frac{\partial W}{\partial t} + X \frac{\partial W}{\partial x} + Y \frac{\partial W}{\partial y} = S, \quad (3)$$

где $W = (p, \varphi, u_g, v_g, u_l, v_l)$ — вектор зависимых переменных, а G , X и Y — матрицы соответствующих коэффициентов. Уравнение (3) можно привести к канонической форме:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} + B \frac{\partial W}{\partial y} = G^{-1} S, \quad (4)$$

где G^{-1} — обратная матрица. Если коэффициенты уравнений (4) считать постоянными, то система (4) представляет собой систему линейных уравнений относительно W . Будем искать решения (4) в виде волнового возмущения с начальной амплитудой W_0 , частотой ω и волновыми числами α и β вдоль осей x и y :

$$W = W_0 e^{i(\omega t + \alpha x + \beta y)}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим:

$$(i\omega E + i\alpha A + i\beta B) W_0 e^{i(\omega t + \alpha x + \beta y)} = T^{-1} S. \quad (6)$$

Разделив (6) на $-i\alpha$ и перейдя к пределу $\alpha \rightarrow \infty$, приходим к выводу, что (5) будет решением (4), если

$$\det(A + \xi B - \lambda E) = 0, \quad \lambda = -\frac{\omega}{\alpha}. \quad (7)$$

Подчеркнем, что (7) описывает распространение высокочастотных возмущений ($\alpha \rightarrow \infty$), поэтому все члены S в правых частях (1) и (2) можно считать бесконечно малыми по сравнению с дифференциальными членами в левых частях уравнений.

Рассмотрим частный случай одномерного двухфазного течения, когда $\xi = 0$.

При $\hat{\sigma} = 0$ и $c_l \rightarrow \infty$ (несжимаемая жидкость) уравнение (7) имеет два тривиальных корня: $\lambda = u_g$ и $\lambda = u_l$, а другие его корни удовлетворяют следующему алгебраическому уравнению четвертого порядка:

$$\varphi [\rho_l (\lambda - u_l)^2] [\gamma (\lambda - u_g)^2 - c_g^2] = c_g^2 \rho_g (1 - \varphi) (\lambda - u_g)^2. \quad (8)$$

Если все корни (8) — действительные числа, решение (5) ограничено, так как $\omega = -\lambda\alpha$. В этом случае система (4) является гиперболической. Ситуация будет совершенно иной, если уравнение (8) имеет два комплексных корня: $\lambda = \text{Re}(\lambda) \pm \text{Im}(\lambda)$. В этом случае система (4) будет иметь решения, экспоненциально нарастающие во времени, причем скорость нарастания возмущений будет тем выше, чем больше α (чем меньше длина волны возмущения) [2].

Анализ уравнения (8) показывает, что оно может иметь комплексные корни. Действительно, полином четвертой степени относительно λ в левой части (8) имеет корни $\lambda_{1,2} = u_g \pm c_g/\sqrt{\gamma}$ и двойной корень $\lambda_{3,4} = u_l$, а полином второй степени относительно λ в правой части (8) — это парабола с вершиной при $\lambda = u_g$. На рис. 1 представлена ситуация, когда кривые, описывающие полиномы в левой и правой частях (8), имеют только две

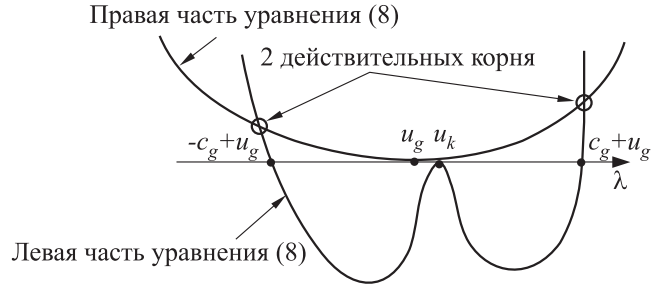


Рис. 1 Графическая интерпретация решений уравнения (8)

точки пересечения, т. е. (8) имеет только два действительных корня, а два других корня — комплексные. В этом случае можно утверждать, что система (4) не является гиперболической, и ЭК-задача поставлена некорректно. Напомним, что система (4) получена из исходной системы (1), (2) путем «замораживания» коэффициентов при производных. Однако, если при произвольных (фиксированных) коэффициентах система (4) негиперболична, это означает, что исходная смешанная ЭК-задача для уравнений (1) и (2) может быть некорректной. Разумеется, источниковые члены S в правых частях (1) и (2) могут обеспечивать затухание возмущений определенной амплитуды и частоты. Однако не исключено, что в задаче с течением времени могут появиться возмущения с такими амплитудами и частотами, которые указанными источниковыми членами подавляться не будут.

Чтобы проиллюстрировать это предположение, авторы провели серию расчетов для одномерного двухфазного течения в канале, схема которого представлена на рис. 2, используя вычислительную программу, численно интегрирующую одномерную систему (4) при $\hat{\sigma}(\varphi) = 0$ и $c_l \rightarrow \infty$. При разностной аппроксимации уравнений (4) использовали полностью неявную конечно-разностную схему. Для определенности считали, что длина канала $L = 1$ см; в начальный момент времени объемная доля газа $\varphi_0 = const = 0,01$, скорость газа $u_{g0} = const = 25$ м/с и скорость жидкости $u_{l0} = const = 30$ м/с однородны по всему каналу; давление на входе в канал $p_{in} = const = 20$ атм, давление на выходе из канала $p_{out} = const = 1$ атм,

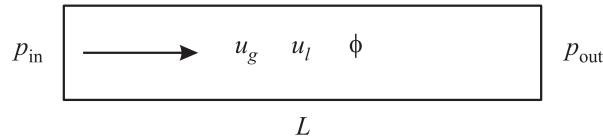


Рис. 2 Схема одномерного канала для проверки корректности смешанной ЭК-задачи о двухфазном течении

причем давление распределено линейно по длине канала; на выходе из канала $\varphi = \varphi_0$. Расчетная сетка была однородна по пространству и включала 100 узлов.

Межфазный обмен количеством движения моделировали, используя простое соотношение:

$$S_g^x = -S_l^x = -0,5\rho_l(u_g - u_l)|u_g - u_l|. \quad (9)$$

На рис. 3 представлены результаты пяти расчетов в виде пространственных распределений объемной доли газовой фазы в некоторый момент времени. В расчете 1 (рис. 3, *a*) источники $S_g^x = -S_l^x$ считали равными 0 (межфазный обмен отсутствует). В расчете 2 (рис. 3, *б*) источники $S_g^x = -S_l^x$ рассчитывали по уравнению (9). В расчете 3 (рис. 3, *в*) источники $S_g^x = -S_l^x$ также рассчитывали по уравнению (9), но использовали возмущенные начальные распределения всех переменных $f(x) = f_0(x)(1 + a \sin((2i + 1)\pi/2))$, где $f_0(x)$ — невозмущенное начальное распределение (как в расчетах 1 и 2), $a = 0,1$ — безразмерная амплитуда возмущения и i — номер узла расчетной сетки. В расчете 4 (рис. 3, *г*) тоже использовали возмущенные начальные распределения всех переменных, как в расчете 3, с той лишь разницей, что $a = 0,01$. Наконец, условия расчета 5 были такими же, как в расчете 3, но считалось, что $\hat{\sigma}(\varphi) \neq 0$. В отсутствие межфазного взаимодействия течение очень быстро теряет устойчивость: в нем самопроизвольно возникают и нарастают возмущения (см. рис. 3, *a*). Включение межфазного взаимодействия приводит к стационарному решению (см. рис. 3, *б*), т. е. межфазное взаимодействие подавляет неустойчивость. Периодическое возмущение начальных распределений всех параметров потока в виде волны с безразмерной амплитудой $a = 0,1$ приводит к неустойчивому решению даже с включенными межфазными взаимодействиями (см. рис. 3, *в*), т. е. межфазное взаимодействие не подавляет неустойчивость. Снижение амплитуды начального возмущения до $a = 0,01$ приводит к стационарному решению (см. рис. 3, *г*), совпадающему с решением на рис. 3, *б*: межфазное взаимодействие подавляет неустойчивость.

Таким образом, при $\hat{\sigma} = 0$ и $c_l \rightarrow \infty$ рассматриваемая здесь одномерная смешанная ЭК-задача некорректна: численные (схемные) или физические возмущения течения могут приводить к нарушению устойчивости решения. Подчеркнем, что такое поведение решения связано со структурой определяющих уравнений, а не с алгоритмом их численного решения. Проблема некорректности смешанной ЭК-задачи хорошо известна в литературе [1–6]. Большинство исследователей считают, что причина некорректности системы (1), (2) — использование одного (одинакового) давления для обеих фаз: $p_l = p_g = p$. Чтобы сделать задачу корректной, необходимо иметь разные давления фаз $p_l \neq p_g$. Этого можно добиться разными способами. В нашем случае в уравнения (2) введен дополнительный член $\hat{\sigma}(\varphi)$. Легко показать,

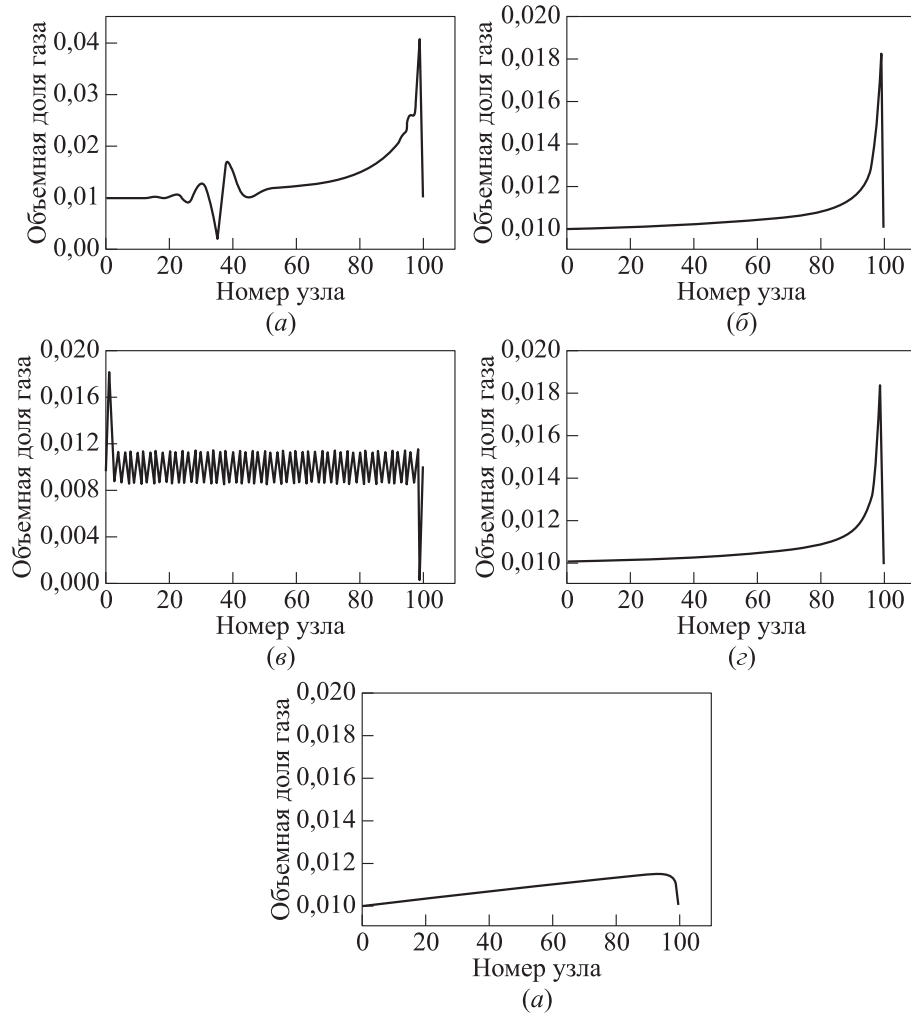


Рис. 3 Расчетные распределения объемной доли газовой фазы вдоль канала в двухфазном потоке в расчетах 1 (а), 2 (б), 3 (в), 4 (г) и 5 (д)

что введение члена $\hat{\sigma}(\varphi)$ эквивалентно условию $p_l \neq p_g$, причем давление жидкости p_l связано с $\hat{\sigma}(\varphi)$ однозначно. Отметим, что при введении $\hat{\sigma}(\varphi)$ определяющие уравнения остаются уравнениями Эйлера.

При $\hat{\sigma}(\varphi) \neq 0$ характеристическое уравнение (8) примет вид:

$$\varphi \left[\rho_l (\lambda - u_l)^2 - D \right] \left[\gamma (\lambda - u_g)^2 - c_g^2 \right] = c_g^2 \rho_g (1 - \varphi) (\lambda - u_g)^2, \quad (10)$$

где $D = \hat{\sigma} - (1 - \varphi)\hat{\sigma}'_{\varphi}$, а $\hat{\sigma}'_{\varphi}$ — производная от $\hat{\sigma}$ по φ . В отличие от (8), полином в левой части (10) имеет четыре разных корня: $\lambda_{1,2} = u_g \pm c_g/\sqrt{\gamma}$ и $\lambda_{3,4} = u_l \pm \sqrt{D/\rho_l}$, а не два корня $\lambda_{1,2}$ и двойного корня $\lambda_{3,4} = u_l$. При соответствующем выборе функции $\hat{\sigma}(\varphi)$ уравнение (10) будет иметь четыре действительных корня и проблема некорректности задачи не возникает.

Чтобы продемонстрировать влияние $\hat{\sigma}(\varphi)$ на решение задачи, в расчете 5 положили $\hat{\sigma}(\varphi) = const = 10^6$ Па, по-прежнему считая жидкость несжимаемой ($c_l \rightarrow \infty$). Подчеркнем, что значение 10^6 Па было выбрано лишь из соображений, чтобы аддитивные члены $\hat{\sigma}(\varphi)$ и $\rho_l u_l^2$ в (2) по своей величине были одного порядка. В отличие от расчета 3 (см. рис. 3, в) в расчете 5 (см. рис. 3, д) получено стационарное решение, т. е. введение второго давления в (2) привело к регуляризации задачи. Отметим, что стационарное решение, полученное в расчете 5, отличается от стационарного решения, полученного в расчетах 2 и 4. Это связано с изменением физической постановки задачи: в расчете 5 обе фазы имеют разные давления. Разумеется, для получения правильного физического решения задачи необходима обоснованная модель для $\hat{\sigma}(\varphi)$. Например, в [6] в качестве физической модели для $\hat{\sigma}(\varphi)$ предложено использовать формулу:

$$\hat{\sigma}(\varphi) = p_l - p_g = \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \quad (11)$$

где ν — коэффициент с размерностью силы (Н). Значение этого коэффициента можно оценить как $\nu \approx \Sigma/\text{grad}(\varphi)$, где Σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Возможны и другие модели для $\hat{\sigma}(\varphi)$. В [6] показано, что соотношение (11) обеспечивает корректность смешанной ЭК-задачи (1), (2).

Как отмечалось выше, при постановке задачи о многофазном течении кроме проблемы корректности существует проблема выбора правильного алгоритма ее численного решения: численные методы, используемые для решения уравнений многофазных течений, даже корректно сформулированных, не всегда правильны. Для решения уравнений многофазного течения часто используются сегрегированные алгоритмы с последовательным (а не одновременным) решением линеаризованных уравнений гидродинамики, которые сводят корректно поставленную задачу к некорректной задаче. Действительно, если правую часть (11) рассматривать как источник в уравнении сохранения количества движения, связанный с силами поверхностного натяжения (как это делается в большинстве коммерческих программных пакетов), то при использовании сегрегированного алгоритма этот источник станет частью источниковых членов S_i^x и S_i^y в системе (1), (2). Как показано выше, эти члены, вообще говоря, не влияют на распространение высокочастотных возмущений. Поэтому, чтобы обеспечить корректность дискретного аналога задачи о многофазном течении, необходимо использо-

вать алгоритмы с одновременным решением, по крайней мере, некоторых уравнений гидродинамики, содержащих давления фаз.

Таким образом, на простых примерах двумерных и одномерных двухфазных течений показано, что для обеспечения корректности смешанной ЭК-задачи и ее дискретного аналога необходимо, чтобы в системе уравнений присутствовали разные давления фаз $p_l \neq p_g$, а при численном решении задачи использовался алгоритм с одновременным решением, по крайней мере, некоторых линеаризованных уравнений гидродинамики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-01-12120-офи-м-2011).

Литература

1. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
3. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // Ж. Прикл. математики и механики, 1965. Т. 29. № 3. С. 418.
4. Ермолаев Б. С., Посвянский В. С. О моделировании конвективного горения уравнениями механики двухфазных реагирующих сред // 6-й Всесоюзный симпозиум по горению и взрыву. — Алма-Ата, 1980. С. 124.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
6. Radvogin, Yu. B., V. S. Posvyanskii, and S. M. Frolov. 2002. Stability of 2D two-phase reactive flows. *J. Physique IV France* 12:437–44.