

УДК 534.222.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН И ДЕТОНАЦИИ В КАНАЛАХ С U-ОБРАЗНЫМИ ПОВОРОТАМИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ*

© 2008 г. С. М. Фролов, В. С. Аксенов, И. О. Шамшин

*Институт химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук, Москва
Московский инженерно-физический институт (государственный университет), Москва*

E-mail: smfrol@chph.ras.ru

Поступила в редакцию 15.03.2007

Проведены экспериментальные и расчетные исследования распространения ударных и детонационных волн в цилиндрических трубах и плоских каналах с двумя U-образными поворотами предельной кривизны. Показано, что U-образные повороты существенно облегчают инициирование газовой детонации. Для минимальной скорости ударной волны, требуемой для возбуждения детонации в трубе околопредельного диаметра с двумя U-образными поворотами предельной кривизны в стехиометрической пропано-воздушной смеси при нормальных начальных условиях, получено значение, близкое к 800 м/с.

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних 30–40 лет изучаются различные аспекты явления фокусировки ударных волн (УВ) в инертных и реагирующих средах [1–6]. При этом экспериментальные и расчетные исследования по инициированию и распространению детонации, как правило, проводятся в прямых трубах [7]. На практике же часто приходится сталкиваться с ситуациями, когда волновые процессы распространяются в изогнутых трубах.

Наши экспериментальные исследования по инициированию и распространению детонации в трубах с U-образными поворотами, витками и змеевиками [8–12] показали, что такие конструктивные элементы позволяют существенно сократить расстояние перехода горения в детонацию (ПГД) и уменьшить критическую интенсивность ударных волн для инициирования детонации, т.е. облегчают образование детонации. Ввиду того, что полученные результаты важны для создания воздушно-реактивных импульсных детонационных двигателей (ИДД) [13], мы предложили [8] и развили [11] идею использования в таких двигателях компактных компоновок детонационных труб с несколькими U-образными поворотами.

При использовании компактных компоновок труб с U-образными поворотами увеличивается длина трубы, что способствует ПГД при минимальных габаритах установки. Кроме того, в соответствии с [8–12] U-образные повороты способствуют фокусировке и усилению слабых ударных

волн, образованных ускоряющимся пламенем. Однако такие повороты увеличивают гидравлическое сопротивление и усложняют периодическое заполнение трубы свежей горючей смесью. Следовательно, для получения компактных компоновок ИДД необходимо искать некоторое компромиссное решение.

В ИДД требуется обеспечить ПГД за кратчайшее время на кратчайших расстояниях. Известно, что длина ПГД сокращается с уменьшением диаметра трубы d . Однако существует минимальный (предельный) диаметр трубы $d = d_{\min}$, при котором возможно распространение детонации. По данным разных авторов, значение d_{\min} лежит в пределах от λ/π до λ , где λ – поперечный размер ячейки многофронтной детонации (например, для стехиометрической пропано-воздушной смеси при нормальных начальных условиях $\lambda \approx 50$ мм).

Цель данной работы состояла в экспериментальном исследовании распространения ударных и детонационных волн в трубах околопредельного диаметра с двумя U-образными поворотами, а также в численном моделировании распространения ударных и детонационных волн в плоском канале с U-образными поворотами предельной кривизны. В качестве горючей смеси для исследования выбрана стехиометрическая смесь пропана с воздухом. Выбор пропана в качестве углеводородного горючего вызван тем, что по своей детонационной способности он близок к парам авиационного керосина [13].

*Статьи, отмеченные звездочкой, были представлены на XXXI Академических чтениях по космонавтике. Москва, январь 2007 г.

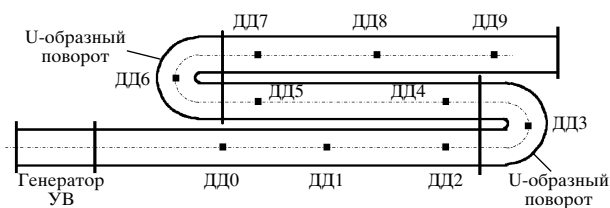


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

На рис. 1 показана схема экспериментальной установки. Основные элементы установки – генератор первичной ударной волны и детонационная труба с двумя U-образными поворотами. Генератор первичной УВ – пороховой газогенератор (ПГГУВ) или электроразрядную камеру (ЭРГУВ), – устанавливали на одном конце трубы, а другой конец трубы был закрыт. В экспериментах использовали гладкие трубы с внутренним диаметром 51 и 41 мм с U-образными поворотами предельной кривизны, обеспечивающими (в отличие от более ранних экспериментов [8, 11, 12]) наиболее компактную компоновку трубы. Повороты были изготовлены из четырех сегментов трубы с помощью электросварки. Внутренний радиус кривизны U-образных поворотов $R = 11 \pm 1$ мм. Перед каждым опытом трубу вакуумировали, а затем заполняли стехиометрической пропано-воздушной смесью до нормальных начальных условий (температура 293 ± 2 К, давление 0.1 МПа).

Для регистрации профилей УВ в трубах и для определения скорости распространения этих волн использовали пьезоэлектрические датчики давления ДД0–ДД9 типа ЛХ600. Расстояния от генератора УВ до датчиков давления приведены в табл. 1. Чтобы идентифицировать детонацию, в некоторых измерительных сечениях наряду с датчиком

Таблица 1. Положения датчиков давления в трубах диаметром 51 и 41 мм

Эксперимент	$d = 51$ мм			$d = 41$ мм	
	ПГГУВ	ЭРГУВ	ЭРГУВ-Д	ПГГУВ	ЭРГУВ
ДД0	400	0	850	450	0
ДД1	650	650	1310	750	750
ДД2	900	900	1810	1050	1050
ДД3	1140	1140	2050	1335	1335
ДД4	1380	1380	2726	1590	1590
ДД5	1816	1816	2966	1953	1953
ДД6	2056	2056	3206	2241	2241
ДД7	2296	2296	3506	2494	2494
ДД8	2596	2596	3806	2494	2794
ДД9	2896	2896	–	3294	3294

давления устанавливали фотодиод, регистрирующий свечение продуктов горения. Сигналы датчиков и фотодиодов направлялись в аналого-цифровой преобразователь L-Card L-783 и обрабатывались на компьютере. Перед опытом в выходном прямом участке трубы размещали тонкую закороченную пластину, что позволяло дополнительно идентифицировать детонацию по следовым отпечаткам.

Среднюю скорость УВ на каждой измерительной базе определяли по расстоянию между датчиками давления и интервалу времени между приходом фронта УВ на соответствующий датчик давления по осциллограмме. Погрешность определения средней скорости УВ не превышала 3%.

Пороховой газогенератор представлял собой цилиндрическую камеру сгорания объемом 22 см³, оборудованную сменным расходным соплом и мембранным узлом. В газогенераторе размещали заряд пористого пироксилинового пороха массой 1.50–2.25 г. Для зажигания заряда использовали пиротехнический воспламенитель. Применение порохового газогенератора позволяло получать УВ с продолжительной фазой сжатия: время горения пороха составляло 1–2 мс. Использование мембран разной толщины из разного материала позволяло изменять максимальное давление в газогенераторе и, следовательно, начальную скорость первичной УВ.

Конструктивно ЭРГУВ представлял собой трехэлектродный разрядник. Запускающий разряд создавал область нагретого газа (плазмы) вокруг электродов, через который затем проходил основной разряд. Расстояние между основными электродами было 8 мм, а между основным и запускающим – 3 мм. Во всех опытах энергия запускающего разряда оставалась неизменной (≈ 57 Дж), в то время как энергию основного разряда варьировали от 0.9 до 2.5 кДж. Емкость конденсаторов основного разряда во всех опытах была неизменной (800 мкФ), а напряжение изменяли в диапазоне от 1.5 до 2.5 кВ. Типичное время разряда – 20–40 мкс. В отличие от ПГГУВ, ЭРГУВ создавал УВ с очень короткой фазой сжатия. Начальную скорость первичной УВ изменяли, подавая разное напряжение на высоковольтный конденсатор ЭРГУВ. Кроме того, были проведены опыты с удлиненной трубой: с дополнительной секцией длиной 850 мм, размещенной между разрядником и первым прямым участком трубы (см. табл. 1). На эти опыты будем в дальнейшем ссылаться как на опыты с ЭРГУВ-Д.

Таким образом, в экспериментах изменяли диаметр трубы, а также начальную скорость и длительность фазы сжатия первичной УВ.

Таблица 2. Зарегистрированные скорости УВ (км/с) на разных измерительных базах (номера строк соответствуют номерам кривых на рис. 2 и рис. 3)

№	ДД0–ДД1	ДД1–ДД2	ДД2–ДД3	ДД3–ДД4	ДД4–ДД5	ДД5–ДД6	ДД6–ДД7	ДД7–ДД8	ДД8–ДД9
Труба с $d = 51$ мм (ПГГУВ)									
1	0.84	0.73	0.73	0.60	0.64	0.63	0.52	0.75	1.07
2	0.90	0.78	0.77	0.61	0.58	0.63	0.50	0.55	0.53
3	0.84	0.83	0.80	0.70	0.79	1.19	1.52	1.91	1.83
4	0.96	0.94	0.94	0.87	1.56	1.86	1.53	1.83	1.73
5	1.28	1.12	1.12	0.88	0.79	0.84	0.65	0.72	0.68
6	1.98	1.74	1.62	1.52	1.66	1.65	1.44	1.80	1.64
7	1.89	1.72	1.70	1.49	1.62	1.55	1.47	1.69	1.64
8	0.86	0.84	0.87	0.77	1.23	1.19	1.56	1.80	1.73
Труба $d = 51$ мм (ЭРГУВ)									
1	0.94	0.70	0.65	0.53	0.57	0.54	0.46	0.51	0.49
2	1.09	0.76	0.69	0.56	0.53	0.56	0.46	0.51	0.49
3	1.23	0.79	0.72	0.58	0.57	0.59	0.49	0.54	0.52
4	1.20	0.80	0.74	0.61	0.80	0.75	0.90	1.13	1.11
5	1.33	0.90	0.83	0.65	0.98	1.11	1.38	1.80	1.70
6	1.84	1.69	1.73	1.41	1.59	1.65	1.39	1.59	1.59
7	1.96	1.62	1.78	1.44	1.63	1.69	1.39	1.67	1.56
Труба $d = 51$ мм (ЭРГУВ-Д)									
1	0.86	0.78	0.74	0.64	0.64	0.51	0.57	0.51	–
2	0.95	0.89	0.79	0.44	0.44	0.75	0.77	1.34	–
3	1.75	1.70	1.6	1.21	1.04	0.93	1.16	1.03	–
4	1.64	1.70	1.63	1.62	1.49	1.49	1.71	1.65	–
5	1.73	1.70	1.71	1.61	1.61	1.48	1.75	1.65	–
Труба $d = 41$ мм (ПГГУВ)									
1	0.52	0.74	0.68	0.59	0.66	0.58	0.52	0.58	0.55
2	0.88	0.83	0.75	0.67	0.73	0.66	0.92	1.95	1.85
3	0.71	0.84	0.81	0.71	0.93	1.50	1.72	1.86	1.83
4	0.76	0.92	0.86	0.89	1.42	1.82	1.61	1.78	1.76
5	0.90	1.13	0.99	1.82	1.79	1.72	1.56	1.74	1.74
6	0.83	1.10	1.07	1.82	1.95	1.68	1.57	1.78	1.76
7	1.53	1.78	1.54	1.52	1.88	1.62	1.50	1.67	1.77
Труба $d = 41$ мм (ЭРГУВ)									
1	0.93	0.79	0.61	0.64	0.67	0.60	0.54	0.61	0.67
2	1.03	0.89	0.68	0.71	0.71	0.67	0.58	1.19	1.30
3	1.18	0.97	0.78	0.93	0.98	1.01	1.77	1.86	1.80
4	1.15	0.98	0.81	0.96	0.90	0.97	1.07	2.04	1.80
5	1.12	0.97	0.85	1.01	1.04	1.02	1.76	1.86	1.77
6	1.74	1.71	1.51	1.58	1.76	1.55	1.57	1.71	1.74
7	1.70	1.71	1.56	1.58	1.73	1.64	1.54	1.74	1.74

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В табл. 2 представлены абсолютные значения (в км/с) средней скорости УВ D , измеренные в типичных опытах в трубах разного диаметра при ис-

пользовании разных ГУВ. На рис. 2 и 3 данные табл. 2 представлены графически в виде зависимостей относительной скорости УВ D/D_0 от расстояния вдоль оси трубы. Измеренную скорость

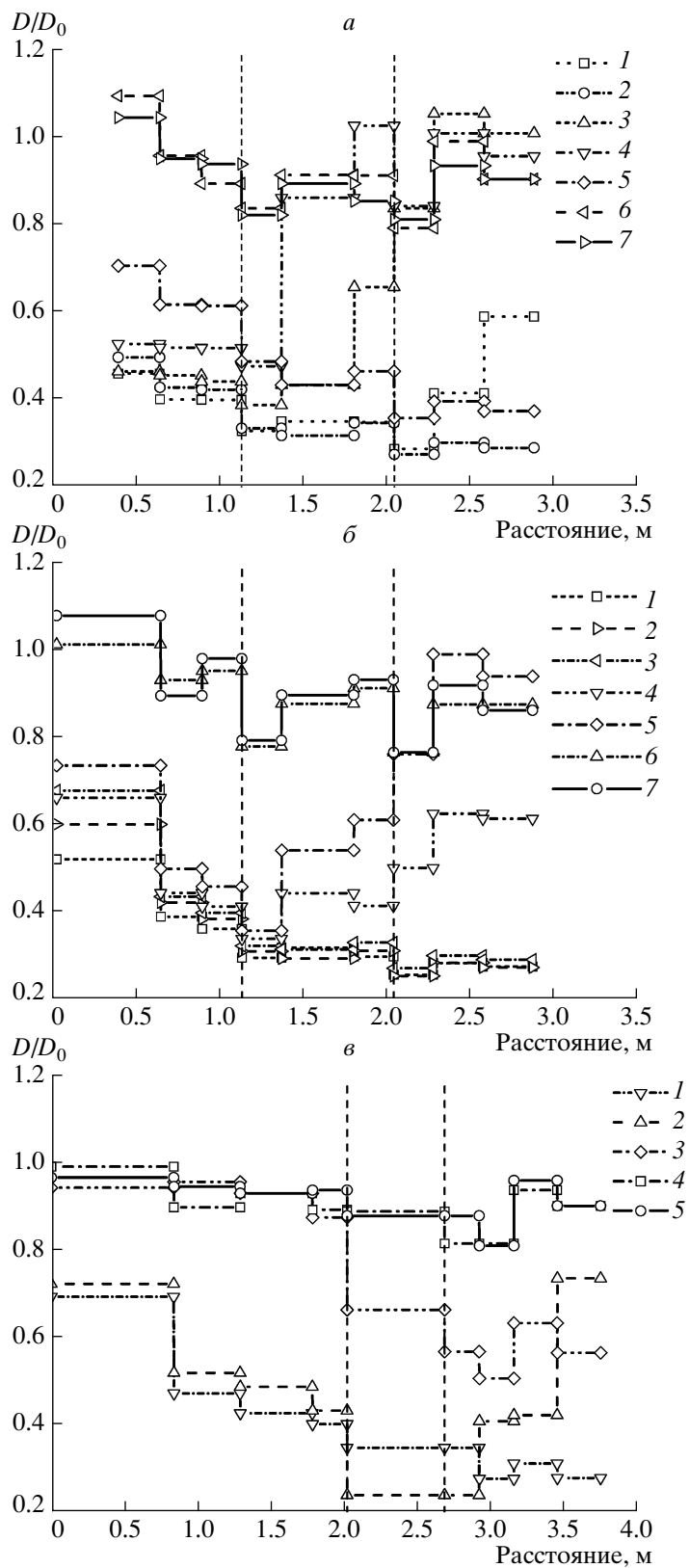


Рис. 2. Средняя скорость УВ на разных измерительных базах в трубе диаметром 51 мм: *a* – ПГГУВ; *б*, *в* – ЭРГУВ (*в* – труба с дополнительной секцией). Номера кривых соответствуют номерам строк в табл. 2. Символы использованы для идентификации кривых.

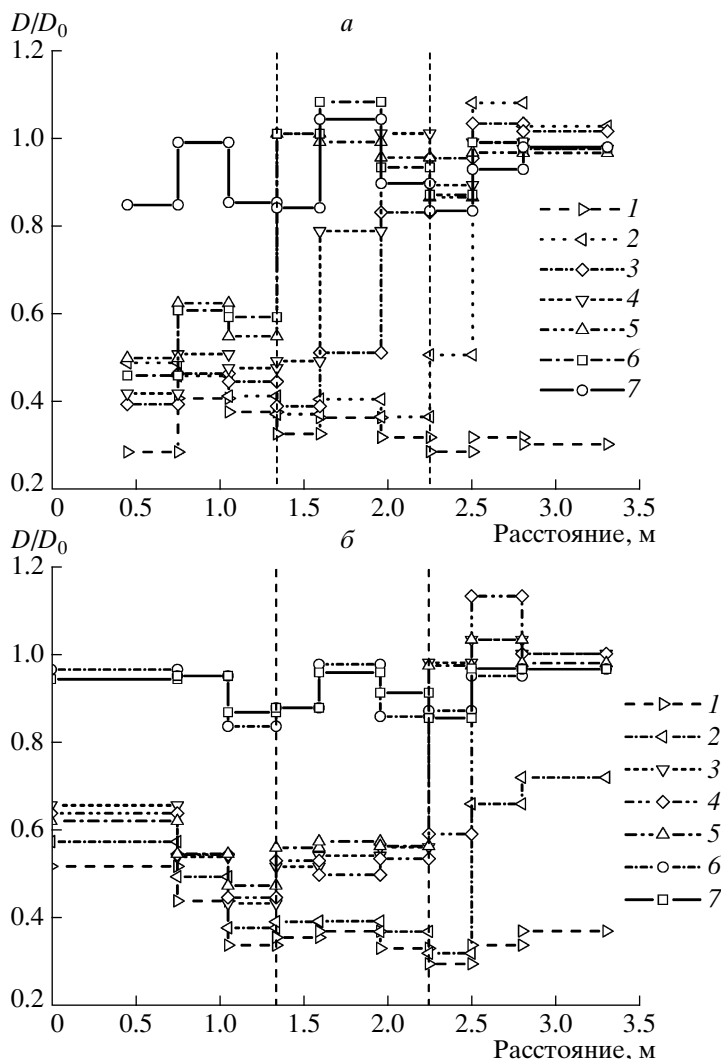


Рис. 3. Средняя скорость УВ на разных измерительных базах в трубе диаметром 41 мм: *а* – ПГГУВ; *б* – ЭРГУВ. Номера кривых соответствуют номерам строк в табл. 2. Символы использованы для идентификации кривых.

УВ относили к скорости детонации Чепмена–Жуге для стехиометрической пропано–воздушной смеси ($D_0 \approx 1800$ м/с). Две вертикальные пунктирные линии на рис. 2 и 3 соответствуют местоположению U-образных поворотов (датчиков ДД3 и ДД6 соответственно). В качестве примера кривая 5 на рис. 2*а* показывает затухание УВ в 51-мм трубе с ПГГУВ в чистом воздухе.

Экспериментально обнаружено существование некоторой минимальной скорости УВ $D = D_{\min}$ на входе в первый U-образный поворот (средняя скорость на измерительной базе ДД2–ДД3), при которой на прямом участке трубы за вторым U-образным поворотом наблюдали детонацию. В 51-мм трубе с ПГГУВ значение минимальной скорости составило $D_{\min} \approx 800$ м/с (рис. 2*а*, кривая 3) и $D_{\min} \approx 830$ м/с в трубе с ЭРГУВ (рис. 2*б*, кривая 5). В 41-мм трубе возникновение детонации наблюдали при еще меньших скоростях: 750 и 780 м/с

при использовании ПГГУВ и ЭРГУВ соответственно (рис. 3*а*, кривая 2 и рис. 3*б*, кривая 3). При скоростях УВ 750–800 м/с детонация возникала за вторым U-образным поворотом, а при скоростях УВ 850–940 м/с – за первым (рис. 2*а*, кривая 4 или рис. 3*а*, кривая 5). Здесь первое значение относится к 41-мм трубе, а второе – к 51-мм трубе. Для сравнения укажем, что в 51-мм трубе с одним U-образным поворотом большего внутреннего радиуса кривизны ($R = 51$ мм) детонация возникала за поворотом только при скорости первичной УВ выше 1100 м/с [8, 11, 12]. Отметим также, что для инициирования детонации в прямых трубах диаметром 51 и 41 мм требовались первичные УВ со скоростью 1700–1800 м/с.

На рис. 4 и 5 приведены характерные записи давления при возникновении детонации в изогнутых трубах диаметром 51 мм и 41 мм за вторым U-образным поворотом, соответствующие кривой 8

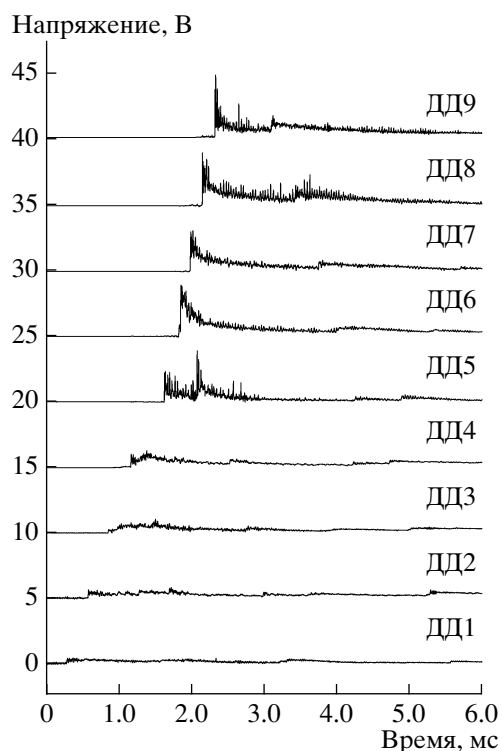


Рис. 4. Записи давления в опыте с инициированием детонации за вторым U-образным поворотом в 51-мм трубе с ПГГУВ (рис. 2а, кривая 8).

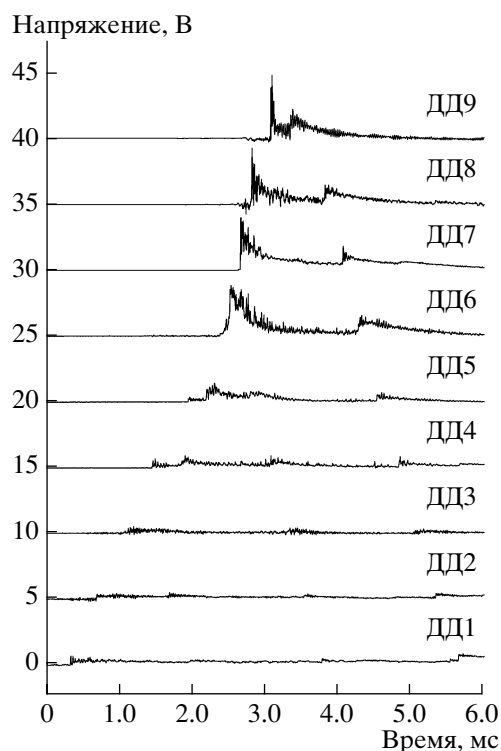


Рис. 5. Записи давления в опыте с инициированием детонации за вторым U-образным поворотом в 41-мм трубе с ПГГУВ (рис. 3а, кривая 2).

на рис. 2а и кривой 2 на рис. 3а. В этих опытах на измерительных базах ДД7–ДД8 и ДД8–ДД9 зарегистрированы скорости, очень близкие к скорости детонации. В сечениях, где были расположены датчики ДД7 и ДД8, сигналы фотодиодов резко отклонялись от нулевой линии одновременно с сигналами датчиков давления – характерная особенность волны детонации, состоящей из ударного фронта и примыкающего к нему фронта реакции. На следовых сажевых отпечатках отчетливо отображались траектории тройных точек, образующих ячеистую структуру с шириной ячейки, близкой к диаметру трубы. Все отмеченные признаки указывают на то, что в данных опытах была зарегистрирована детонация. Тот факт, что измеренная скорость детонации была несколько меньше термодинамической скорости (см. табл. 2), связан, по-видимому, с потерями количества движения и энергии в трубах околопредельного диаметра.

При скоростях УВ $D < D_{\min} \approx 800$ м/с детонация в трубе не возникала (см., например, рис. 2а, кривая 2), хотя датчики давления регистрировали вторичные взрывы в области за первичной УВ. При прохождении U-образного поворота плоская УВ отражалась от внешней стенки, что могло вызвать самовоспламенение смеси с последующим ее горением и усилением УВ. Ускорение УВ, вы-

званное частичным сгоранием взрывчатой смеси, наблюдали, например, в 51-мм трубе с ПГГУВ при скорости УВ около 730 м/с на входе в первый U-образный поворот (см. рис. 2а, кривая 1), в 51-мм трубе с ЭРГУВ при скорости УВ около 740 м/с (рис. 2б, кривая 4), в 51-мм трубе с ЭРГУВ и дополнительной секцией при скорости УВ около 750 м/с (рис. 2в, кривая 2), а также в 41-мм трубе с ЭРГУВ при скорости УВ около 680 м/с (рис. 3б, кривая 2).

По аналогии с предельными явлениями при инициировании детонации в прямых трубах указанные явления следует рассматривать как предельные для труб с U-образными поворотами. Не исключено, что при увеличении длины прямой секции за вторым U-образным поворотом или изменении длины прямой секции между двумя U-образными поворотами в условиях указанных опытов могла возникнуть детонация. Отметим также, что вблизи предела инициирования детонации в опытах наблюдали и гистерезисные явления. В соответствии с опытом 1 (табл. 2, 51-мм труба с ПГГУВ) скорость УВ на входе в первый U-образный поворот была приблизительно равна 730 м/с, а на выходе из второго U-образного поворота (на измерительной базе ДД8–ДД9) она составила 1070 м/с. В соответствии же с опытом 2 (табл. 2, 51-мм труба с ПГГУВ) скорость УВ равномерно

уменьшалась от приблизительно 770 м/с на входе в первый U-образный поворот до 530 м/с на выходе из второго поворота трубы.

Для прямого инициирования детонации в 51-мм трубе с помощью ПГГУВ приходилось генерировать сильную первичную УВ, скорость которой на первой измерительной базе ДД0–ДД1 составляла $D \approx 1900\text{--}2000$ м/с (кривые 6 и 7 на рис. 2а). При распространении такой УВ по прямому участку трубы до первого U-образного поворота ее скорость уменьшалась до 1700–1750 м/с ($\approx 0.96D_0$) на входе в первый поворот. При распространении через U-образные повороты трубы скорость волны уменьшалась приблизительно до 1520 м/с ($0.84D_0$) в первом повороте и до 1490 м/с ($0.82D_0$) во втором повороте. После выхода волны из U-образных поворотов уменьшение скорости сменялось ее восстановлением на уровне 1640–1800 м/с ($0.91\text{--}1.00D_0$).

Аналогичное поведение наблюдали в 51-мм трубе с ЭРГУВ (кривые 6 и 7 на рис. 2б) и в 51-мм трубе с ЭРГУВ-Д с той лишь разницей, что “провалы” в скорости волны при прохождении U-образных поворотов были больше: они достигали $0.77D_0$. В опытах в 51-мм трубе с ЭРГУВ-Д наблюдались и режимы с затуханием сильных ударных волн без повторного инициирования детонации. Например, кривая 3 на рис. 2в соответствует случаю, когда скорость волны после прохождения первого U-образного поворота уменьшилась от 1600 м/с до 1210 м/с ($\approx 0.67D_0$), а после прохождения второго поворота – до 1040 м/с ($\approx 0.58D_0$).

МОДЕЛЬ

Задача о прохождении УВ через U-образный поворот цилиндрической трубы требует решения трехмерных уравнений газовой динамики. Для понимания же сути процессов, сопровождающих инициирование детонации в изогнутых трубах, провели численное моделирование распространения УВ в плоских каналах с двумя U-образными поворотами с геометрическими параметрами, повторяющими параметры используемых экспериментальных установок. Поскольку характерные времена исследуемых процессов очень малы (сотни микросекунд), нет необходимости учитывать явления вязкости и теплопроводности. Поэтому в основу математической модели положены уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для идеального, многокомпонентного, невязкого и нетеплопроводного газа (уравнения Эйлера), которые для декартовой системы координат можно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (1)$$

со следующими вектор-функциями:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho Y_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho u v \\ (\rho E + p)u \\ \rho Y_i u \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v v + p \\ (\rho E + p)v \\ \rho Y_i v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \\ J_i \end{bmatrix},$$

где ρ – плотность газа, u и v – компоненты вектора скорости, E – полная удельная энергия газа, p – давление, Y_i – массовая доля i -го компонента в смеси газов, J_i – скорость образования (расходования) i -го компонента газовой смеси, Q – скорость энерговыделения за счет химических реакций. Количество компонентов в газовой смеси – N_g .

Полную удельную энергию газа определяли по формуле

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$$

где e – внутренняя удельная энергия газа, которую находили по известной зависимости удельной теплоемкости газа от температуры:

$$e = \int_0^T C_v(T) dT = \bar{C}_v(T)T.$$

Здесь $C_v(T)$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме, а $\bar{C}_v(T)$ – средняя удельная теплоемкость в диапазоне температур (0– T), а T – температура газа.

Удельную теплоемкость газа $C_v(T)$, находили по известным удельным теплоемкостям $C_{vi}(T)$ индивидуальных компонентов газовой смеси:

$$C_v(T) = \sum_{i=1}^{N_g} Y_i C_{vi}(T),$$

причем зависимость удельных теплоемкостей индивидуальных компонентов от температуры представляли в виде полиномов 4-й степени [14]:

$$C_{vi}(T)/R = A_{1,i} + A_{2,i}T + A_{3,i}T^2 + A_{4,i}T^3 + A_{5,i}T^4.$$

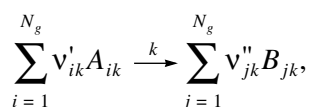
В дополнение к уравнениям (1) использовали уравнение состояния идеального газа:

$$p = \rho RT \sum_{i=1}^{N_g} Y_i \mu_i^{-1}, \quad (2)$$

где μ_i – молекулярный вес i -го компонента, а R – универсальная газовая постоянная.

Внутреннюю энергию e и уравнение состояния (2) использовали для определения термодинамических характеристик системы – температуры T и давления p . Для замыкания задачи использовали начальные и граничные условия, которые описаны ниже.

Химическое превращение описывали набором из N_r необратимых химических реакций:



где A_{ik} – исходные реагенты, а B_{jk} – продукты k -й реакции, являющиеся компонентами газовой смеси, ν'_{ij} и ν''_{jk} – стехиометрические коэффициенты. Для расчета скорости реакций использовали соотношения:

$$w_k = A_k T^{n_k} (P/P_0) \exp(-(E_a)_k / (RT)) \times \prod_{i=1}^{N_g} (\rho Y_i / \mu_i) \text{sign}(\nu'_{ik}), \quad (3)$$

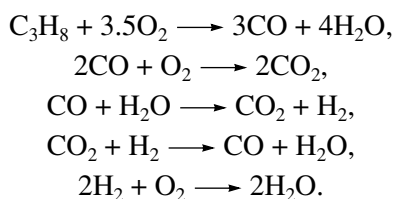
где A_k – предэкспонентный множитель, $(E_a)_k$ – энергия активации, n_k – эффективный порядок реакции, m_k – параметр, учитывающий изменение скорости реакции с давлением, P_0 – атмосферное давление. По известным скоростям реакций вычисляли величины Q и J_i :

$$Q = \sum_{k=1}^{N_r} w_k Q_k, \quad Q_k = \sum_{i=1}^{N_g} (\nu'_{ik} - \nu''_{ik}) \Delta H_i^0,$$

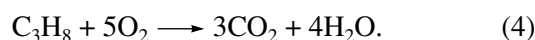
$$J_i = \sum_{k=1}^{N_r} (\nu''_{ik} - \nu'_{ik}) \mu_i w_k,$$

где Q_k – тепловой эффект k -й реакции, а ΔH_i^0 – стандартные энтальпии образования веществ.

В предварительных расчетах для описания окисления пропана использовали глобальный пятиступенчатый кинетический механизм [15]:



Поскольку расчеты с этим механизмом реакций требовали значительных затрат машинного времени, провели проверочные вычисления с использованием одноступенчатого механизма окисления пропана:



Оказалось, что результаты расчетов с одноступенчатым и пятиступенчатым механизмами принципиально не отличались друг от друга. Поэтому все расчеты, представленные в данной работе, провели с одноступенчатым механизмом. Скорость реакции (4) вычисляли по формуле (3), как для бимолекулярной реакции пропана с кислородом. Использовали следующие значения кинетических параметров: $A_1 = 7 \cdot 10^8 \text{ м}^3/(\text{моль} \cdot \text{с})$, $n_1 = 0$, $m_1 = -0.2264$, $(E_a)_1 = 191 \text{ кДж/моль}$. Эти значения были получены в результате обработки экспериментальных данных по задержкам воспламенения [16, 17] и с учетом того, что поперечный размер детонационной ячейки для стехиометрической пропано-воздушной смеси при нормальных условиях должен быть близок к 50 мм. Тепловой эффект реакции, рассчитанный по энтальпиям образования исходных реагентов и продуктов реакции (4), принимали равным 46.6 МДж/кг пропана.

Термодинамический расчет скорости детонации в стехиометрической пропано-воздушной смеси, выполненный по программе TDS [18], дал значение 1800 м/с в предположении равновесного состава продуктов детонации и 1910 м/с при учете только C_3H_8 , O_2 , N_2 , CO_2 и H_2O – компонентов смеси с реакцией (4).

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Численное решение уравнений модели было основано на принципе расщепления по физическим процессам [19]. В соответствии с этим принципом на каждом временном шаге сначала учитывали влияние на решение таких факторов, как конвективный перенос и работа сил давления (первый этап), а затем – влияние химических превращений (второй этап).

На первом этапе расчета решали систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

используя метод Годунова [20]. Для численной реализации граничных условий использовали метод фиктивных ячеек. Потоки массы, количества движения и энергии на границах ячеек определяли из точного решения задачи Римана. Начальные параметры для задачи Римана вычисляли на границе ячейки, считая в соответствии с принципом минимального приращения производной [21], что внутри ячеек параметры распределены ли-

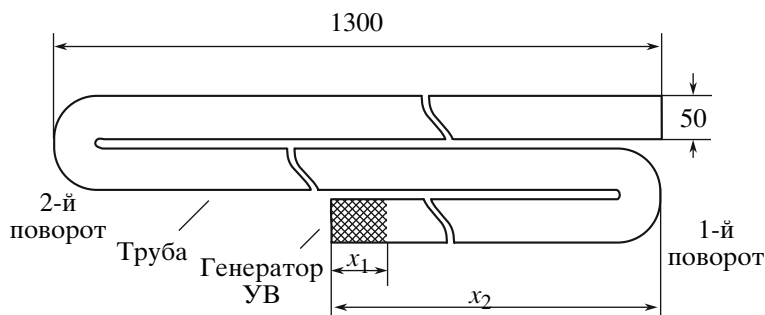


Рис. 6. Схема расчетной области.

нейно. Таким образом достигался второй порядок точности разностной схемы по пространству. В качестве граничного условия использовали условие непротекания вещества через стенку канала, т.е. отсутствия потоков вещества через граничные ячейки. В схеме со сквозным счетом это достигалось заданием нулевой нормальной скорости на границе.

На втором этапе расчета решали систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{S}(\mathbf{U}^*), \quad (6)$$

которая описывала изменение состава газа и выделение энергии за счет химических превращений. Исходными данными для решения системы (6) служили результаты численного решения системы (5). Систему (6) решали численно с помощью явного метода Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации [22]. В некоторых случаях для проверки точности алгоритма использовали неявный метод [23], разработанный специально для интегрирования уравнений химической кинетики. Результаты контрольных расчетов не выявили существенных различий.

Величину шага интегрирования по времени выбирали в соответствии с условием Куранта

$$\Delta t^{CFL} = K \frac{\min(\Delta x_i, \Delta y_j)}{\max(|u_{i,j} \pm c_{i,j}|, |v_{i,j} \pm c_{i,j}|)},$$

где K – число Куранта. Все расчеты выполняли с $K = 0.1$. Для повышения устойчивости счета при переходе от одного временного слоя к другому допускали лишь небольшое изменение шага, используя следующее эвристическое правило:

$$\Delta t^{n+1} = \begin{cases} \min(\Delta t^{CFL}, (1 + \alpha)\Delta t^n), & \Delta t^n \leq \Delta t^{CFL}, \\ \max(\Delta t^{CFL}, (1 - \alpha)\Delta t^n), & \Delta t^n > \Delta t^{CFL}, \end{cases}$$

где α – малая величина порядка 0.1–0.3. Разностный аналог определяющих уравнений задачи приведен в [24].

Точность численного метода предварительно проверили на стандартных задачах о распаде произвольного разрыва и на задачах о дифракции УВ на клине. В предварительных расчетах исследовали влияние всех численных параметров, включая размеры расчетной сетки, на полученные результаты.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводили на плоской, равномерной, прямоугольной разностной сетке с размером ячеек 0.5 мм. На рис. 6 показана схема расчетной области, которая по своим размерам близка к 51-мм трубе с двумя U-образными поворотами, используемой в экспериментах. Как и в экспериментах, плоский канал имел три прямых участка и два U-образных поворота предельной кривизны. Высота канала $H = 50$ мм, длина средней прямой секции – 1200 мм.

В начальный момент времени весь канал был равномерно заполнен стехиометрической пропанно-воздушной смесью. Для получения первичной УВ в канале предусматривали инициирующую секцию длиной x_1 . В инициирующей секции задавали повышенные значения давления, температуры и скорости смеси, соответствующие заданному начальному числу Маха первичной УВ $M_0 = D/c_0$, где c_0 – скорость звука в невозмущенной свежей смеси. В оставшейся части канала смесь покоилась при давлении $p = 0.1$ МПа и температуре $T = 298$ К.

В расчетах варьировали интенсивность первичной УВ M_0 и длительность фазы сжатия τ_+ на входе в первый U-образный поворот. При заданной интенсивности УВ длительность фазы сжатия τ_+ определялась длиной инициирующей секции x_1 и расстоянием до поворота $x_2 - x_1$. На вставке рис. 7 показано, как по расчетному профилю давления в УВ определяли величину τ_+ .

На рис. 7 показаны расчетные параметрические области существования детонации на плоскости “начальное число Маха УВ M_0 ” – “длительность фазы сжатия УВ M_0 ”. Черные символы соответствуют расчетам, в которых за первым U-образным

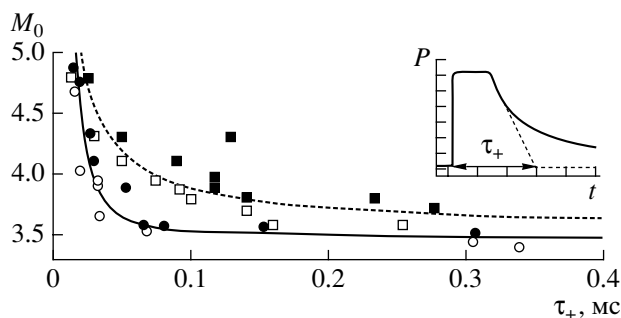


Рис. 7. Расчетные области инициирования детонации в 51-мм трубе с U-образным поворотом разной кривизны: \circ/\square – нет детонации, \bullet/\blacksquare – детонация, \circ/\bullet – канал с U-образным поворотом предельной кривизны, \square/\blacksquare – канал с U-образным поворотом, внутренний радиус которого $R = H$. Кривые аппроксимируют критические условия инициирования детонации. На вставке показано, как определяли длительность фазы сжатия УВ τ_+ .

поворотом возникала и распространялась детонация, а пустые символы – расчетам, в которых детонация не возникала. Кружки относятся к каналу с U-образными поворотами предельной кривизны (см. рис. 6). Квадраты относятся к каналу с U-образными поворотами меньшей кривизны ($R = H$ [12]). Кроме точек, на рис. 7 показаны кривые, аппроксимирующие предельные условия инициирования детонации за первым U-образным поворотом:

$$M_0 = 3.5 + 400\tau_+^{-2}$$

– для поворота предельной кривизны (сплошная кривая на рис. 7) и

$$M_0 = 3.55 + 22\tau_+^{-0.9}$$

– для поворота с внутренним радиусом, равным ширине канала (пунктирная кривая на рис. 7). Иницирование детонации наблюдали в параметрических областях выше указанных кривых, а в областях ниже кривых детонация не возникала.

В расчетах максимальное значение τ_+ составило 1.1 мс (соответствующие точки на рис. 7 не показаны). Из рис. 7 следует, что, начиная с $\tau_+ = 0.2$ – 0.3 мс, кривые выходят на горизонтальное плато: дальнейшее увеличение длительности фазы сжатия практически не влияет на минимальную интенсивность УВ, требуемую для инициирования детонации. При этом в канале с U-образным поворотом предельной кривизны детонация возникала при меньших M_0 и τ_+ . Именно это обстоятельство стало причиной нашего интереса к исследованию возникновения детонации в трубах с U-образными поворотами предельной кривизны.

На рис. 8 представлены типичные результаты расчетов на примере четырех вариантов. Здесь

показаны максимальные давления, достигаемые в каждой точке канала за все время расчета – так называемые “численные сажевые отпечатки”. Длительность фазы сжатия УВ для вариантов, представленных на рис. 7а и рис. 7б, составила $\tau_+ = 0.3$ мс, а для вариантов на рис. 7в и рис. 7г – $\tau_+ = 0.06$ мс. Соответствующие значения скорости УВ на входе в первый U-образный поворот равны $D = 1180$ (рис. 7а), 1215 (рис. 7б и 7в) и 1325 м/с (рис. 7г), что соответствует числам Маха УВ $M_0 = 3.48, 3.58$ и 3.91 .

На рис. 9 для тех же вариантов расчета приведены зависимости относительной скорости УВ D/D_0 от пройденного расстояния вдоль канала с двумя U-образными поворотами ($D_0 = 1910$ м/с). За начало отсчета расстояния принято сечение на входе в первый U-образный поворот. Скорость УВ определяли, анализируя изменение давления в точках, лежащих на центральной линии канала. В U-образных поворотах следили за изменением давления в 15 точках.

В условиях рис. 8а ($D = 1180$ м/с) при отражении УВ от внешней стенки первого U-образного поворота локальная температура была достаточно высокой, чтобы произошло самовоспламенение смеси. Однако объем очага самовоспламенения и скорость выделения энергии оказались недостаточными, чтобы обеспечить “сцепление” УВ и фронта реакции (по терминологии [25]), и фронт реакции отстал от УВ. Тем не менее, химические превращения в области за УВ продолжались и первичная УВ в среднем ускорялась: на входе во второй U-образный поворот ее скорость составила уже 1300 м/с. Кроме того, изменилась и длительность фазы сжатия в УВ: она стала больше вследствие энерговыделения за фронтом. Новые параметры первичной УВ оказались достаточными для того, чтобы при ее отражении от внешней поверхности второго U-образного поворота произошло практически мгновенное (1–2 мкс) самовоспламенение смеси в относительно большом объеме. Этот локальный вторичный взрыв привел к образованию двух вторичных УВ. Первая УВ распространялась по потоку, а вторая – против потока. После нескольких отражений от стенок канала на расстоянии около $(5-6)H$ первая УВ превратилась в пересжатую детонационную волну, которая распространялась до выходного сечения канала без каких-либо значительных изменений средней скорости (см. рис. 9а, кривая 1) и ячеистой структуры (см. рис. 8а).

В условиях рис. 8б ($D = 1215$ м/с) после прохождения УВ через первый U-образный поворот возникла детонация. При прохождении через второй поворот ячеистая структура детонационной волны сначала разрушилась, а затем восстановилась на расстоянии около $(5-6)H$. Численный сажевый отпечаток, показанный на рис. 8б,

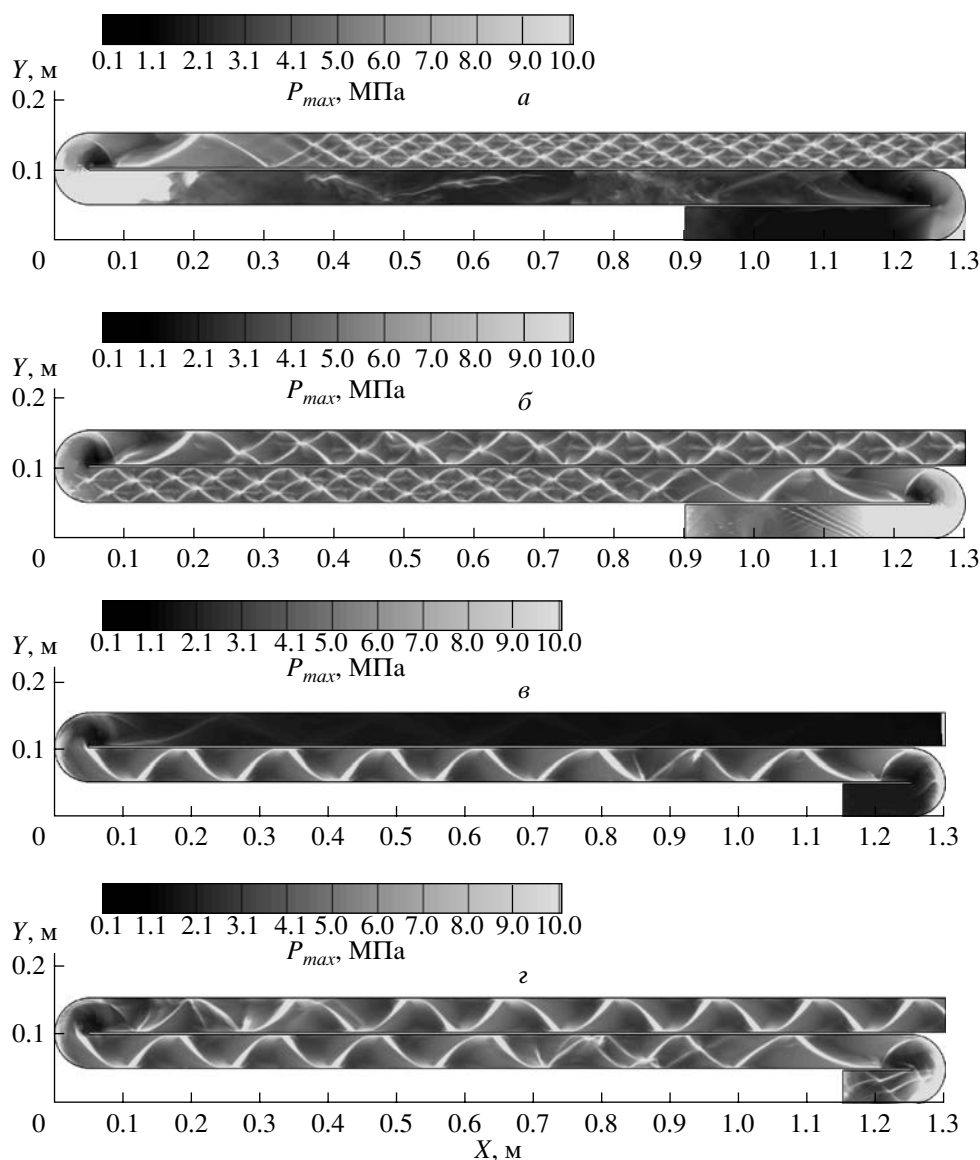


Рис. 8. Расчетные поля максимального давления (“численные сажевые отпечатки”): *a, б* – $\tau_+ = 0.3$ мс; *в, г* – $\tau_+ = 0.06$ мс. Скорость УВ на входе в U-образный поворот: 1180 м/с (*a*), 1215 м/с (*б, в*) и 1325 м/с (*г*).

имеет некоторое сходство с аналогичными отпечатками, полученными при численном исследовании распространения детонации в каналах с частичным перекрытием сечения [26]: поток вначале сжимается, а затем расширяется, создавая косую УВ, которая в дальнейшем трансформируется в волну детонации.

В условиях рис. 8*в* ($D = 1215$ м/с), когда длительность фазы сжатия была меньше, чем в условиях рис. 8*б*, за первым U-образным поворотом наблюдали возникновение и распространение детонации с одной поперечной волной. При прохождении второго U-образного поворота детонационная волна распалась на УВ и отстающий от нее фронт реакции вследствие взаимодействия

поперечной волны с волной разрежения на внутренней стенке поворота. При увеличении скорости УВ от $D = 1215$ м/с до $D = 1325$ м/с (рис. 8*г*) несколько сдвинулась фаза прихода волны во второй U-образный поворот, и детонационная волна успешно прошла через него.

Из рис. 9*а* следует, что для УВ с относительно большой длительностью фазы сжатия при большей начальной скорости $D = 1215$ м/с ($D/D_0 = 0.64$, кривая 2) детонация возникала за первым U-образным поворотом, тогда как при меньшей начальной скорости $D = 1180$ м/с ($D/D_0 = 0.62$, кривая 1) – за вторым U-образным поворотом. Этот результат согласуется с экспериментальными наблюдениями. При малой длительности фазы сжа-

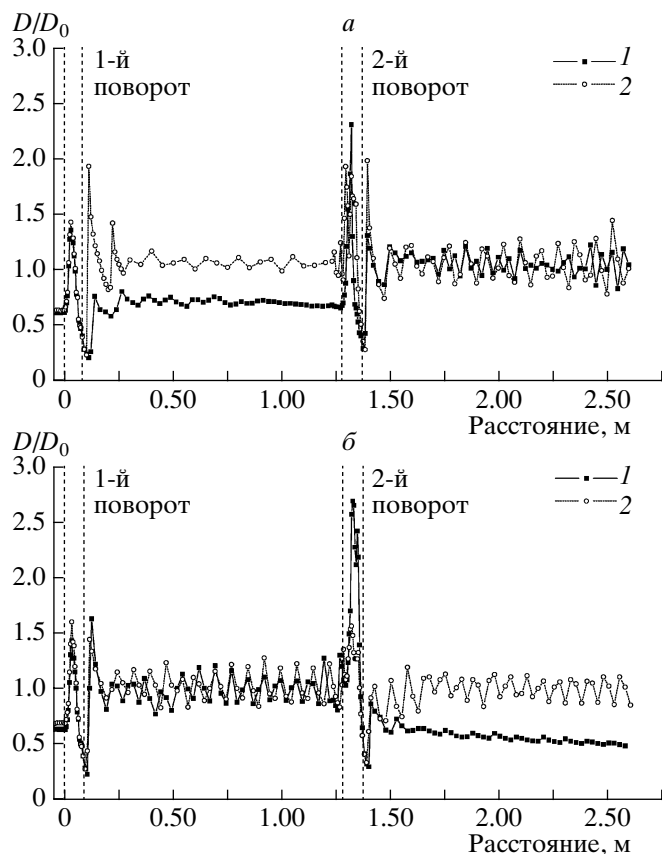


Рис. 9. Расчетные зависимости скорости УВ от пройденного расстояния вдоль центральной линии канала: *a* – $\tau_+ = 0.3$ мс (1 – $D = 1180$ м/с, 2 – 1215 м/с); *б* – $\tau_+ = 0.06$ мс (1 – $D = 1215$ м/с, 2 – 1325 м/с).

тия (рис. 9б) УВ с той же начальной скоростью $D = 1215$ м/с ($D/D_0 = 0.64$, кривая 1) не инициировала детонацию за вторым U-образным поворотом, поэтому потребовалось увеличить начальную скорость УВ до $D = 1325$ м/с ($D/D_0 = 0.69$, кривая 2). В условиях рис. 9а и 9б при прохождении УВ через первый U-образный поворот скорость волны изменялась одинаково: сначала увеличивалась приблизительно до $D/D_0 = 1.5$ в центральной части поворота, а затем снижалась до $D/D_0 = 0.2$ на выходе из поворота. Резкое последующее увеличение скорости УВ до $D/D_0 = 1.6$ – 2.0 на выходе из поворота (рис. 9а, кривая 2) вызвано вторичными взрывами у внешней стенки поворота и сливанием отраженных вторичных взрывных волн с первичной УВ.

Отличия в наблюдаемой структуре детонационных волн на рис. 8 связано с количеством вторичных взрывов при прохождении УВ через U-образные повороты. Так, структуры “длинных” волн (рис. 8а и 8б) содержали две-три поперечные волны, вызванные несколькими вторичными взрывами, а структуры “коротких” волн – одну поперечную волну. Это обстоятельство отчетливо

проявилось при дифракции волн во втором U-образном повороте: “короткая” волна не смогла преодолеть охлаждающее действие централизованной волны разрежения, возникшей на внутренней стенке поворота, а “длинная” смогла. При этом во втором U-образном повороте отмечены очень высокие скорости УВ: $D/D_0 = 2$ – 2.7 . Однако если среднюю скорость УВ определять лишь по трем точкам (на входе, в центре и выходе из поворота), то максимальное значение относительной скорости окажется близким к величине, измеренной экспериментально: $D/D_0 = 1.2$. Отметим также, что на прямых участках канала детонационные волны распространялись приблизительно с одинаковой средней скоростью, равной скорости детонации ($D/D_0 \approx 1$), независимо от структуры волны (рис. 9а и 9б).

Численные расчеты показали сложную структуру течения при прохождении ударной волной U-образного поворота. На рис. 10–13 для примера представлены результаты двух расчетов в виде полей давления и плотности в разные моменты времени. В первом расчете (рис. 10, 11) детонация за поворотом канала не возникала, тогда как во втором расчете (рис. 12 и 13) она возникала. Условия расчетов отличались только небольшим изменением начальной скорости УВ – от $D = 1175$ м/с в первом расчете до $D = 1200$ м/с во втором расчете. Другими словами, два рассматриваемых расчета соответствовали переходу через критические условия инициирования детонации в U-образном повороте.

Анализируя рис. 10 и 11, можно видеть, что вследствие отражения УВ в окрестности внешней стенки поворота возникла зона высокого давления (рис. 10, $t = 0.1$ мс), в которой произошло самовоспламенение смеси (светлое пятно при $x \approx 1.29$ м, $y \approx 0.03$ м на рис. 11 при $t = 0.1$ мс). Самовоспламенение (вторичный взрыв) произошло при угле разворота внешней стенки около 50° – 60° . Видно, что момент самовоспламенения приблизительно согласуется с моментом прихода волны разрежения от внутренней стенки поворота (веера изолиний давления на рис. 10 и плотности на рис. 11, централизованные на внутренней стенке поворота). К моменту времени $t = 0.2$ мс УВ прошла через U-образный поворот, а волна самовоспламенения охватила лишь узкую полосу вдоль внешней стенки поворота (светлая полоска на рис. 11 при $t = 0.2$ мс). Интересно, что волна самовоспламенения направленно распространялась как вниз, так и вверх по потоку. Кроме того, в окрестности точки отражения УВ от внешней стенки прямого участка канала за U-образным поворотом образовался второй очаг самовоспламенения (при $x \approx 1.20$ м, $y \approx 0.10$ м на рис. 10 и 11 при $t = 0.2$ мс). К моменту времени $t = 0.2$ мс волна самовоспламенения от этого очага охватила почти все сечение канала, отставая от переднего удар-

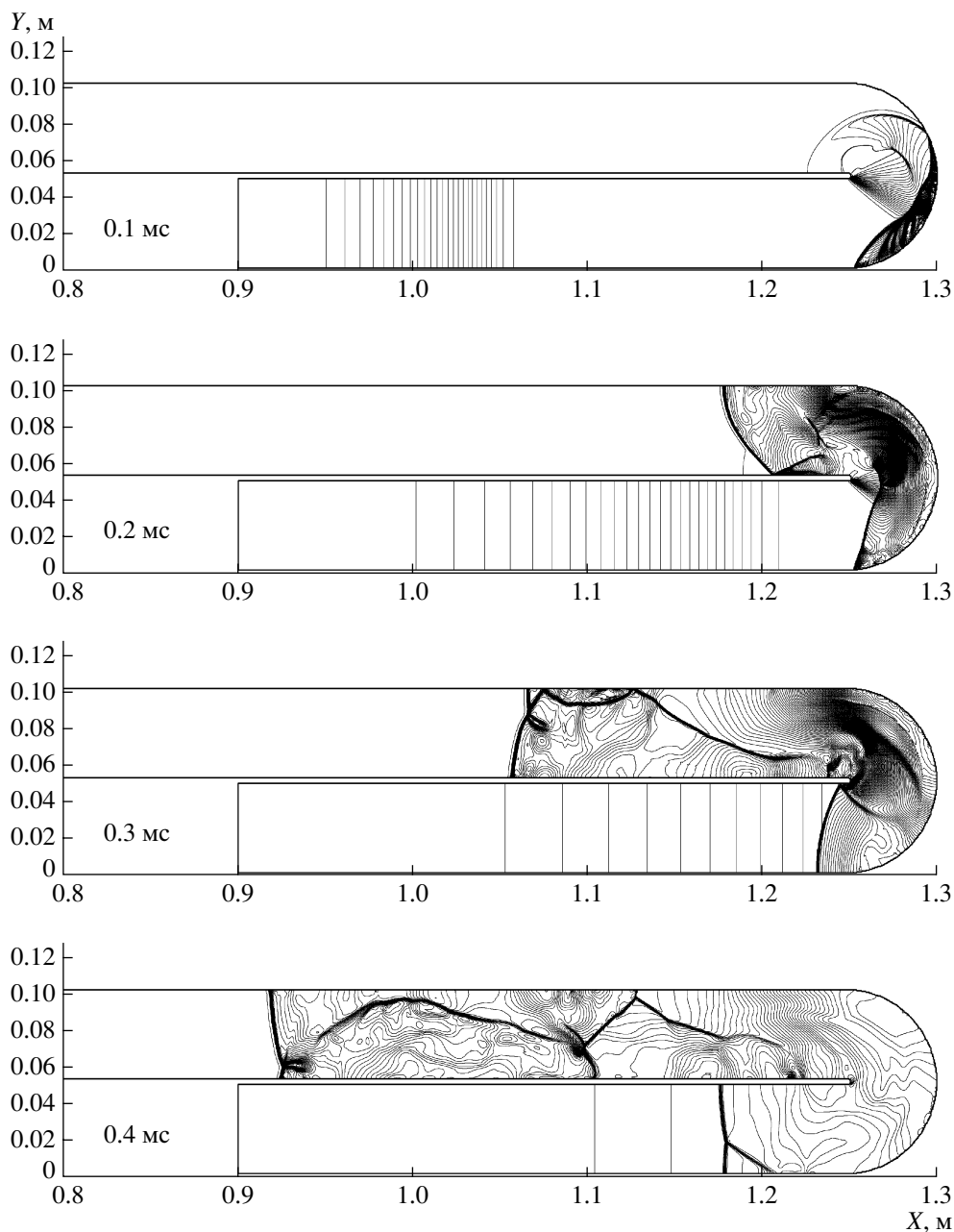


Рис. 10. Расчетные изолинии давления для варианта с $D = 1175$ м/с и $\tau_+ = 0.3$ мс.

ного фронта на 1.5 – 2 см и не перекрываясь с волной самовоспламенения от первого очага. С течением времени ($t = 0.3$ мс и $t = 0.4$ мс на рис. 10 и 11) расстояние между передним ударным фронтом и ближайшим к нему фронтом самовоспламенения только увеличивалось, достигнув 4–6 см при $t = 0.4$ мс. Таким образом, в первом расчете не было предпосылок для возникновения детонации в прямом участке канала за первым U-образным поворотом. Следует, однако, отметить, что в потоке за ударным фронтом продолжалось энерговыделе-

ние, которое препятствовало быстрому затуханию УВ.

Во втором расчете (рис. 12 и 13) самовоспламенение смеси произошло несколько раньше, чем в первом, поэтому размер очага самовоспламенения в момент времени $t = 0.1$ мс оказался больше (светлое пятно при $x \approx 1.29$ м, $y \approx 0.03$ м на рис. 13 при $t = 0.1$ мс). Как и в первом расчете, распространение волны самовоспламенения происходило на фоне охлаждающего действия волны разрежения от внутренней стенки поворота (веера изолиний давления на рис. 12 и плотности на рис. 13,

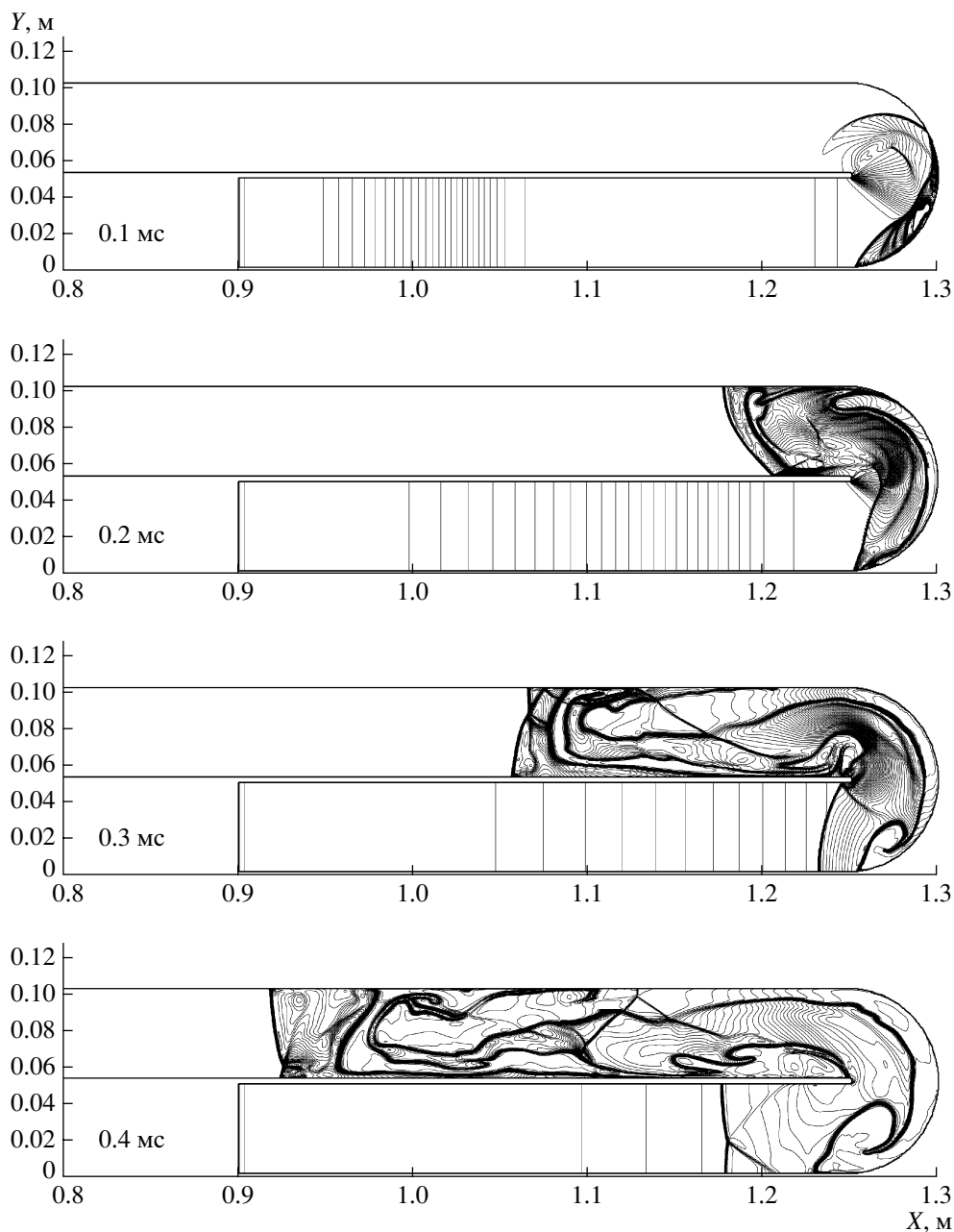


Рис. 11. Расчетные изолинии плотности для варианта с $D = 1175$ м/с и $\tau_+ = 0.3$ мс.

центрированные на внутренней стенке поворота). Однако, в отличие от первого расчета, уже к моменту времени $t = 0.15$ мс волна самовоспламенения охватила не только полоску вдоль внешней стенки поворота (светлая полоска на рис. 13 при $t = 0.15$ мс), но и перекрыла все сечение канала на выходе из U-образного поворота. Последнее произошло вследствие вторичного взрыва в окрестности точки отражения УВ от внешней стенки при $x \approx 1.26$ м, $y \approx 0.10$ м (см. рис. 12 и 13 при $t = 0.15$ мс) и последующего слияния волн самовоспламенения от первого и вто-

рого очагов. В моменты времени $t = 0.2$ мс и $t = 0.3$ мс в прямом участке канала за U-образным поворотом уже распространялась детонация с ярко выраженной поперечной волной и с фронтом реакции, следующим непосредственно за УВ. На относительно большом расстоянии от фронта детонации наблюдалось догорание объемов свежей смеси.

В целом сравнение экспериментальных и расчетных результатов, представленных выше, показывает их хорошее качественное согласие. Однако существует количественное расхождение между

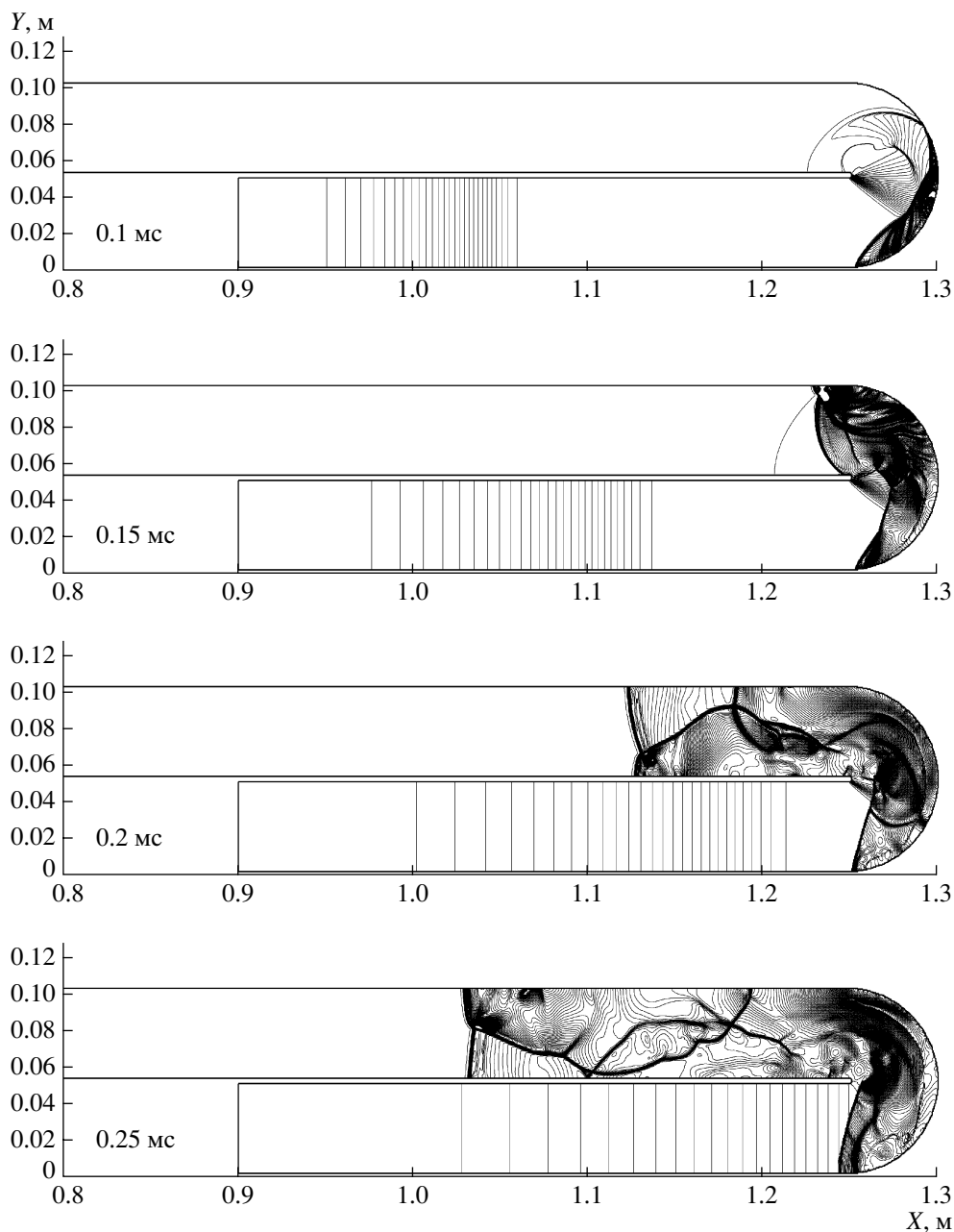


Рис. 12. Расчетные изолинии давления для варианта с $D = 1200$ м/с и $\tau_+ = 0.3$ мс.

критическими условиями инициирования детонации. Это расхождение можно объяснить различиями в геометрии U-образных поворотов цилиндрической трубы и плоского канала, а также принятыми упрощающими предположениями относительно кинетики окисления пропана.

В отличие от поворота плоского канала при прохождении УВ через поворот цилиндрической трубы происходят дополнительные отражения от боковых стенок. Можно ожидать, что при этом локальные значения давления и температуры

окажутся выше, чем в повороте плоского канала, а критические значения начального числа Маха УВ будут соответственно ниже.

Одноступенчатый механизм окисления пропана, использованный в расчетах, применим лишь к описанию высокотемпературной задержки самовоспламенения и, вообще говоря, не предназначен для моделирования процесса горения. В частности, он не учитывает ни низкотемпературное окисление топлива, ни диссоциацию продуктов сгорания.

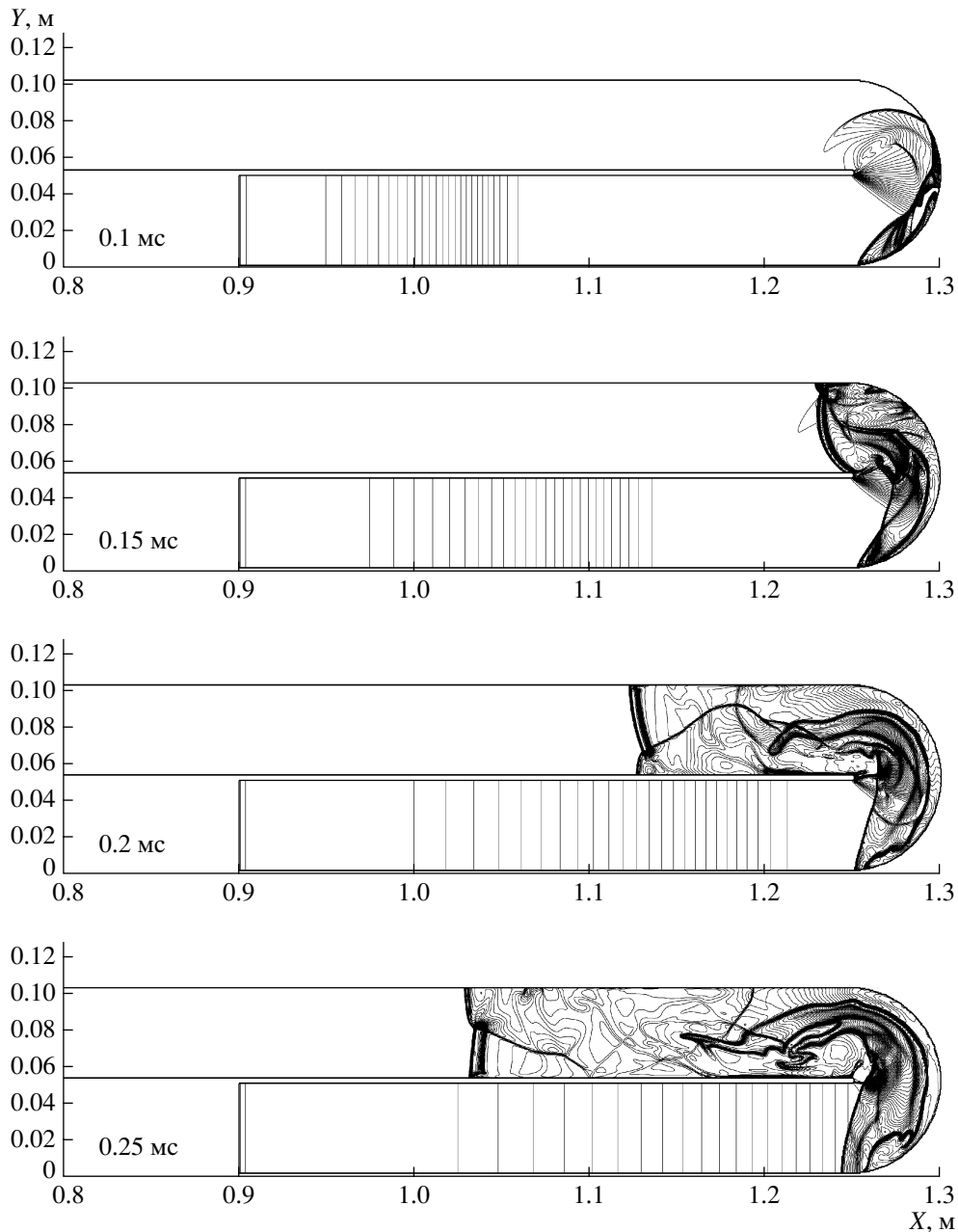


Рис. 13. Расчетные изолинии плотности для варианта с $D = 1200$ м/с и $\tau_+ = 0.3$ мс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнены систематические экспериментальные и расчетные исследования распространения ударных и детонационных волн в цилиндрических трубах и плоских каналах с двумя U-образными поворотами предельной кривизны. Экспериментально показано, что повороты существенно облегчают инициирование газовой детонации. Минимальная скорость УВ, требуемая для инициирования детонации в изогнутых трубах диаметром 51 и 41 мм в стехиометрической пропано-воздушной смеси при нормальных начальных условиях, ока-

залась значительно меньшей (750–800 м/с), чем в прямых трубах (1700–1800 м/с). Такие волны легко генерировать в прямой трубе со спиралью Щелкина с помощью слабого источника зажигания [9–11]. Механизм инициирования детонации в этом случае связан с многократными отражениями УВ при прохождении поворотов и вторичными взрывами. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании воздушно-реактивных ИДД для летательных аппаратов с компактной компоновкой камер сгорания.

Работа выполнена при частичной поддержке Международным научно-техническим центром (проект № 2740) и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 08-08-00068 и № 05-08-50115). И.О. Шамшин выражает благодарность за финансовую поддержку “Фонду содействия отечественной науки”, Министерству образования и науки РФ (программа “Развитие научного потенциала высшей школы”), а также Американскому фонду гражданских исследований и развития (совместная российско-американская программа “Фундаментальные исследования и высшее образование”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мешков Е.Е.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 5. С. 554.
2. *Izumi K., Aso S., Nishida M.* // Shock Waves. 1994. № 3. P. 213.
3. *Shugaev F.V., Serov A.O., Shtemenko L.S., Kishige H., Nishida M.* // Shock Waves. 1999. № 9. P. 31.
4. *Борисов А.А., Гельфанд Б.Е., Скачков Г.И. и др.* // Хим. физика. 1988. Т. 7. № 12. С. 1387.
5. *Gelfand B.E., Khomik S.V., Bartenev A.M., Medvedev S.P., Grönig H., Oliver H.* // Shock Waves. 2000. № 10. P. 197.
6. *Grönig H.* // Proc. Workshop (Intern.) Shock Wave Focusing / Ed. Takayama K. Sendai, Japan: Tohoku University Press, 1990. P. 1.
7. *Nettleton M.A.* Gaseous detonations: their nature, effects and control. London–New York: Chapman and Hall, 1987.
8. *Frolov S.M., Aksenov V.S., Shamshin I.O.* // Nonequilibrium Processes. V. 1: Combust. and Detonation / Ed. Roy G., Frolov S., Starik A.M. M.: Torus Press, 2005. P. 348.
9. *Фролов С.М., Аксенов В.С., Басевич В.Я.* // ДАН. 2005. Т. 401. № 2. С. 201.
10. *Фролов С.М., Аксенов В.С., Басевич В.Я.* // ТВТ. 2006. Т. 44. № 2. С. 285.
11. *Frolov S.M., Aksenov V.S., Shamshin I.O.* // Pulsed and Continuous Detonations / Ed. Roy G., Frolov S., Sinibaldi J. M.: Torus Press, 2006, P. 146.
12. *Frolov S.M., Aksenov V.S., Shamshin I.O.* // Proc. Combust. Institute. 2007. V. 31. P. 2421.
13. *Фролов С.М.* Импульсные детонационные двигатели. М.: Торус Пресс, 2006.
14. *JANAF Thermochemical Tables.* 2nd Edition, U.S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1970.
15. *Басевич В.Я., Беляев А.А., Фролов С.М.* // Хим. физика. 1998. Т. 17. № 9. С. 112.
16. *Burcat A., Scheller K., Lifshitz A.* // Combust. and Flame. 1971. V. 16. N 3. P. 29.
17. *Борисов А.А., Заманский В.М., Лисянский В.В. и др.* // Хим. физика. 1988. Т. 7. № 5. С. 665.
18. *Victorov S.B.* Software for Equilibrium and Non-Equilibrium Thermodynamic Calculations (Version 3.16). Moscow, Semenov Institute of Chemical Physics. 2002.
19. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
20. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
21. *Колган В.П.* // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68.
22. *Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
23. *Азатян В.В., Коган А.М., Нейгауз М.Г. и др.* // Кинетика и катализ. 1975. Т. XVI. Вып. 3. С. 577.
24. *Шамшин И.О.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МИФИ, 2003.
25. *Гельфанд Б.Е., Фролов С.М., Цыганов С. А.* // Хим. физика. 1989. Т. 8. № 5. С. 1547.
26. *Levin V.A., Markov V.V., Zhuravskaya T.A., Osinkin S.F.* // Pulsed and Continuous Detonations / Ed. Roy G., Frolov S., Sinibaldi J. M.: Torus Press, 2006. P. 176.